Κεφάλαιο 3

Ολόμορφες συναρτήσεις

3.1 Μιγαδική παράγωγος

Ορισμός 3.1.1. Δίνεται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ με $A \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Έστω $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι (μιγαδικά) *παραγωγίσιμη* στο z_0 αν το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

υπάρχει (ανήκει στο $\mathbb{C}$). Το όριο αυτό ονομάζεται *παράγωγος* της f στο z_0 και συμβολίζεται με $f'(z_0)$.

Η f ονομάζεται *ολόμορφη* στο A αν η f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του A. Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε $f \in H(A)$.

Ορισμός 3.1.2. Αν $f \in H(\mathbb{C})$, λέμε ότι η f είναι *ακέραιη* συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.1.3.

1. Αν $f = c$ (σταθερά), τότε η f είναι ακέραιη.

2. Αν $f(z) = az + b$, τότε

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} a = a, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$$

   Άρα $f \in H(\mathbb{C})$.

3. Αν $f(z) = z^2$, τότε για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = 2z_0.$$

   Άρα $f \in H(\mathbb{C})$ και $f'(z) = 2z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα 3.1.4. *Αν $f \in H(A)$, τότε η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη.

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)] = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0.$$

Άρα $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. □

Θεώρημα 3.1.5. *Αν $f, g \in H(A)$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, τότε*

(α) $c_1 f + c_2 g \in H(A)$ *και* $(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$.

(β) $fg \in H(A)$ *και* $(fg)' = f'g + fg'$.

(γ) *Αν* $g(z) \neq 0$, $\forall z \in A$, *τότε* $\dfrac{f}{g} \in H(A)$ *και* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Απόδειξη. Αποδεικνύονται όπως στο Λογισμό. □

Παράδειγμα 3.1.6. $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή ότι $f \in H(\mathbb{C})$ και $f'(z) = nz^{n-1}$.

Παράδειγμα 3.1.7. $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$. Για $z = z_0 + t$, $t > 0$,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\overline{z}_0+t-\overline{z}_0}{z_0+t-z_0} = 1.$$

Για $z = z_0 + is$, $s > 0$,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{s\to 0^+}\frac{\overline{z}_0-is-\overline{z}_0}{z_0+is-z_0} = -1.$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.1.8. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί να δειχθεί ότι η $f(z) = \operatorname{Re} z$ δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο.

Θεώρημα 3.1.9. *Αν $f \in H(A)$, $g \in H(B)$, $f(A) \subset B$, τότε $g \circ f \in H(A)$ και*

$$\forall z \in A, \quad (g\circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big)f'(z).$$

Απόδειξη. Έστω $a \in A$. Θέτουμε $b = f(a)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $h : B \to \mathbb{C}$ με

$$h(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w)-g(b)}{w-b}, & w \in B \setminus \{b\}. \\ g'(b), & w = b \end{cases}$$

Η h είναι συνεχής στο b και ισχύει

$$\frac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(a)\big)}{z-a} = h\big(f(z)\big)\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

για $z \in A \setminus \{a\}$. Στην παραπάνω ισότητα παίρνουμε όρια για $z \to a$, χρησιμοποιούμε τη συνέχεια των f και h και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to a}\frac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(a)\big)}{z-a} &= \lim_{z\to a} h\big(f(z)\big)\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\\ &= h\big(f(a)\big)f'(a) = h(b)f'(a) = g'(b)f'(a),\end{aligned}$$

δηλαδή $(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$. □

Θεώρημα 3.1.10 (Γραμμική προσέγγιση).
Αν $f \in H(A)$ και $a \in A$, τότε $\forall z \in A$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + E(z), \tag{3.1}$$

όπου E είναι μια ολόμορφη συνάρτηση στο A με $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{E(z)}{z-a} = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $E(z) = f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)$, $z \in A$. Τότε

$$\begin{aligned}\lim_{z\to a}\frac{E(z)}{z-a} &= \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)}{z-a}\\ &= \lim_{z\to a}\left[\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - f'(a)\right] = 0.\end{aligned}$$ □

Παρατήρηση 3.1.11. Ισχύει και το αντίστροφο. Διατυπώστε το και αποδείξτε το (εύκολη άσκηση).

3.2 Οι εξισώσεις Cauchy - Riemann

Θεώρημα 3.2.1 (Cauchy - Riemann 1).
Έστω $f = u + iv$ μια συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$. Αν η f έχει παράγωγο στο σημείο $a + ib \in A$, τότε οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, υπάρχουν στο (a, b) και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy - Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b), \tag{3.2}$$

και επιπλέον ισχύει

$$f'(a+ib) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $z_0 = a + ib$. Θεωρούμε ακολουθία $\{z_n\} \subset A \setminus \{z_0\}$ με $z_n = x_n + iy_n \to z_0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, ισχύει

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}. \tag{3.3}$$

Όμως

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{u(x_n, y_n) - u(a, b)}{(x_n - a) + i(y_n - b)} + i\frac{v(x_n, y_n) - v(a, b)}{(x_n - a) + i(y_n - b)}. \tag{3.4}$$

Η (3.3) ισχύει για οποιαδήποτε ακολουθία $z_n \to z_0$. Επιλέγουμε $z_n = x_n + ib$ με $x_n \to a$, και αντικαθιστούμε στη (3.4):

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{u(x_n, b) - u(a, b)}{x_n - a} + i\frac{v(x_n, b) - v(a, b)}{x_n - a}.$$

Από τον ορισμό των μερικών παραγώγων $\frac{\partial u}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)$, προκύπτει ότι αυτές υπάρχουν και

$$\frac{u(x_n, b) - u(a, b)}{x_n - a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) \quad \text{και} \quad \frac{v(x_n, b) - v(a, b)}{x_n - a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\partial v}{\partial x}(a, b).$$

Έτσι από τις (3.3) και (3.4) προκύπτει ότι

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a, b). \tag{3.5}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε $z_n = a + iy_n$ με $y_n \to b$ και αντικαθιστούμε στη (3.4):

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} &= \frac{u(a, y_n) - u(a, b)}{i(y_n - b)} + i\frac{v(a, y_n) - v(a, b)}{i(y_n - b)} \\
&= \frac{v(a, y_n) - v(a, b)}{y_n - b} - i\frac{u(a, y_n) - u(a, b)}{y_n - b}.
\end{aligned}$$

Όπως παραπάνω, προκύπτει ότι οι $\frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(a, b)$ υπάρχουν και

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a, b). \tag{3.6}$$

Από τις (3.5) και (3.6) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy - Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a, b). \qquad \square$$

Παράδειγμα 3.2.2. $f(x+iy) = x^2 + y^2 + i(2x+4y), \quad x+iy \in \mathbb{C}$.
Ισχύουν τα ακόλουθα: $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 2x + 4y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 4.$$

Οι εξισώσεις Cauchy - Riemann είναι:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 4 \\ -2y & = & 2 \end{array} \right. .$$

Αυτές ικανοποιούνται μόνον όταν $x = 2, y = -1$, δηλαδή μόνον στο σημείο $z = 2 - i$. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2-i\}$.

Παράδειγμα 3.2.3. $f(x+iy) = e^x - ie^y$.
Ισχύει ότι: $u(x,y) = e^x$, $v(x,y) = -e^y$, άρα

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^y.$$

Οι εξισώσεις Cauchy - Riemann είναι:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^x & = & -e^y \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Αυτές δεν ικανοποιούνται για κανένα $z \in \mathbb{C}$. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 3.2.4 (Γραμμική προσέγγιση $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).
Αν $u : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ με $(a,b) \in A$, και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ υπάρχουν στο A και είναι συνεχείς στο (a,b), τότε υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon_u : A \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

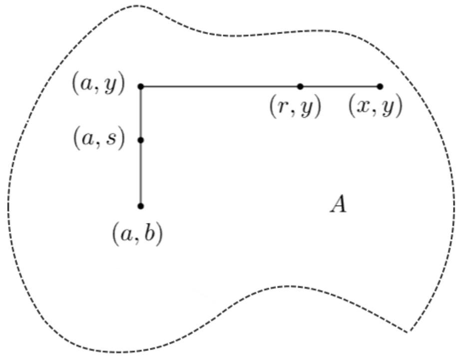
(α) $$u(x,y) = u(a,b) + \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)(y-b) + \varepsilon_u(x,y), \quad \forall (x,y) \in A.$$

(β) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\varepsilon_u(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε, $\forall (x,y) \in A$,

$$\varepsilon_u(x,y) = u(x,y) - u(a,b) - \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το (β) ισχύει. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στη συνάρτηση $x \mapsto u(x,y)$ και προκύπτει:



$$u(x,y)-u(a,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(r,y)(x-a),$$

για κάποιο r ανάμεσα στα a και x. Ομοίως για τη συνάρτηση $y\mapsto u(a,y)$,

$$u(a,y)-u(a,b)=\frac{\partial u}{\partial y}(a,s)(y-b),$$

για κάποιο s ανάμεσα στα b και y. Άρα

$$\begin{aligned}u(x,y)-u(a,b)&=[u(x,y)-u(a,y)]+[u(a,y)-u(a,b)]\\&=\frac{\partial u}{\partial x}(r,y)(x-a)+\frac{\partial u}{\partial y}(a,s)(y-b).\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο που ορίζει την ε_u:

$$\varepsilon_u(x,y)=\left[\frac{\partial u}{\partial x}(r,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)\right](x-a)+\left[\frac{\partial u}{\partial y}(a,s)-\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\right](y-b).$$

Διαιρούμε με $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ και χρησιμοποιούμε τις προφανείς ανισότητες

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leqslant 1\quad\text{και}\quad\frac{|y-b|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leqslant 1$$

και προκύπτει

$$\left|\frac{\varepsilon_u(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\right|\leqslant\left|\frac{\partial u}{\partial x}(r,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}(a,s)-\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\right|.$$

Επειδή η $\frac{\partial u}{\partial x}$ είναι συνεχής στο (a,b) και επειδή $(x,y)\to(a,b)\Rightarrow(r,y)\to(a,b)$, προκύπτει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(r,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)\right|=0,$$

και παρομοίως για την άλλη απόλυτη τιμή. □

Θεώρημα 3.2.5 (Cauchy - Riemann 2).
Δίνεται συνάρτηση $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$. Έστω $z_0 = a + ib \in A$. Υποθέτουμε ότι

(α) *Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ υπάρχουν $\forall (x,y) \in A$,*

(β) *είναι συνεχείς στο (a,b),*

(γ) *ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy - Riemann στο (a,b).*

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και

$$f'(z_0) = f'(a+ib) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα γραμμικής προσέγγισης, $\forall z = x + iy \in A$,

$$\begin{aligned}
f(z) - f(z_0) &= [u(x,y) - u(a,b)] + i[v(x,y) - v(a,b)] \\
&= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)(y-b) + \varepsilon_u(x,y)\right] \\
&\quad + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)(y-b) + \varepsilon_v(x,y)\right] \\
&= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\right](x-a) + i\left[\frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\right](y-b) \\
&\quad + \varepsilon_u(x,y) + i\varepsilon_v(x,y) \\
&\overset{(3.2)}{=} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\right][(x-a) + i(y-b)] + \\
&\quad + \varepsilon_u(x,y) + i\varepsilon_v(x,y).
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\right] + \frac{\varepsilon_u(x,y) + i\varepsilon_v(x,y)}{(x-a) + i(y-b)}.$$

Επειδή

$$\left|\frac{\varepsilon_u(x,y) + i\varepsilon_v(x,y)}{(x-a) + i(y-b)}\right| \leqslant \frac{|\varepsilon_u(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} + \frac{|\varepsilon_v(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \xrightarrow[z \to z_0]{} 0,$$

παίρνοντας όρια για $z \to z_0$ (δηλαδή $(x,y) \to (a,b)$), προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b). \qquad \square$$

Πόρισμα 3.2.6. *Δίνοται ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ και συνάρτηση $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο A. Η f είναι ολόμορφη στο A αν και μόνο αν οι u, v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy - Riemann στο A.*

Παράδειγμα 3.2.7. $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + i(2xy - 4), \quad z \in \mathbb{C}.$
Ισχύει:

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy - 4$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Από το Θεώρημα Cauchy - Riemann 2, η f είναι ακέραιη συνάρτηση. Για να βρούμε την έκφραση της f ως προς z (και όχι μόνο ως προς x, y), αντικαθιστούμε στον τύπο της f

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

και βρίσκουμε $f(z) = z^2 - 4i$.

Θεώρημα 3.2.8. *Αν D τόπος, $f = u + iv \in H(D)$ και $f' = 0$ στο D, τότε η f είναι σταθερή στο D.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cauchy - Riemann 1,

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{στο } D.$$

Επειδή $f' = 0$, θα ισχύει $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ στο D. Από το Λογισμό, οι u, v είναι σταθερές στο D. Άρα και η f είναι σταθερή στο D. □

Παράδειγμα 3.2.9.

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}.$$

Έχουμε $u(x,y) = f(x,y)$, $v(x,y) = 0$, άρα

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{για} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{για} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Οι μερικές παράγωγοι της u υπάρχουν στο $\mathbb{C}$, είναι συνεχείς στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$ (ελέγξτε γιατί). Η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο 0, διότι αν ήταν, τότε θα υπήρχε το όριο

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Όμως το όριο δεν υπάρχει (θέτουμε $y = ax$ κλπ).

Θεώρημα 3.2.10. *Αν D είναι τόπος, $f \in H(D)$ και η $|f|$ είναι σταθερή στο D, τότε η f είναι σταθερή στο D.*

Απόδειξη. Έστω $f = u + iv$. Από το Θεώρημα Cauchy - Riemann 1,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{στο } D \tag{3.7}$$

και

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{στο } D. \tag{3.8}$$

Αν $|f| = c$ στο D, τότε $|f|^2 = u^2 + v^2 = c^2$ στο D. Παραγωγίζοντας παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0, \end{cases}$$

το οποίο με χρήση της (3.7) γίνεται

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}u - \dfrac{\partial u}{\partial y}v & = & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}u + \dfrac{\partial u}{\partial x}v & = & 0. \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\exists z_0 \in D$ με $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \neq 0$ ή $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \neq 0$. Τότε η ορίζουσα του παραπάνω συστήματος (στο z_0) είναι διάφορη του 0. Αρα $u(z_0) = v(z_0) = 0$, δηλαδή $f(z_0) = 0$. Επομένως $c = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $f = 0$ στο D.

Αν $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ στο D, τότε $f' = 0$ στο D. Λόγω του Θεωρήματος 3.2.8 αυτό σημαίνει ότι η f είναι σταθερή στο D. □

3.3 Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός 3.3.1. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $u : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *αρμονική* αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο A και

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Πρόταση 3.3.2. *Αν $f = u + iv \in H(A)$ και οι u, v έχουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο A, τότε οι u, v είναι αρμονικές συναρτήσεις.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cauchy - Riemann 1,

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Άρα η u είναι αρμονική στο A. Παρομοίως για τη v. □

Ορισμός 3.3.3. Αν u, v είναι αρμονικές συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ και $f = u + iv \in H(A)$, τότε η v ονομάζεται *συζυγής αρμονική* τής u στο A.

Παράδειγμα 3.3.4. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

Άρα η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$. Θα βρούμε μια συζυγή αρμονική v της u στο $\mathbb{C}$. Πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2.$$

Από την πρώτη εξίσωση συνεπάγεται ότι $v(x,y) = 3x^2 y + \varphi(y)$, το οποίο από τη δεύτερη εξίσωση οδηγεί στην

$$3x^2 + \varphi'(y) = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -y^3 + c.$$

Άρα $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + c$, όπου c είναι πραγματική σταθερά. Εύκολα ελέγχουμε ότι η

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3) + ic$$

είναι ακέραιη συνάρτηση (με τις εξισώσεις Cauchy - Riemann). Για να εκφράσουμε ως προς z την f, θέτουμε $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ και μετά από πράξεις βρίσκουμε $f(z) = z^3 + ic$.

Παράδειγμα 3.3.5. Βρείτε ακέραιη συνάρτηση f με $\operatorname{Re} f(x,y) = x+1$ και $f(0) = 1+2i$.

Λύση. Θέτουμε $f = u+iv$ και $u(x,y) = x+1$. Η u είναι αρμονική διότι $\Delta u = 0$ στο $\mathbb{C}$. Από τις εξισώσεις Cauchy - Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

παίρνουμε

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v(x,y) & = & y+\varphi(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Άρα $v(x,y) = y+c$ κι επομένως

$$f(x,y) = x+1+i(y+c).$$

Επειδή $f(0,0) = 1+2i$, θα έχουμε $1+ic = 1+2i$, δηλαδή $c=2$. Άρα

$$f(x,y) = (x+1)+i(y+2) = z+1+2i.$$

Ισχύει $f \in H(\mathbb{C})$, $\operatorname{Re} f(x,y) = x+1$ και $f(0) = 1+2i$.

3.4 Ασκήσεις

3.1. Αν $f \in H(A)$, δείξτε ότι η συνάρτηση $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη στο σύνολο $A^* = \{\overline{z} : z \in A\}$.

3.2. Δίνεται ακέραιη συνάρτηση $f = u+iv$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\overline{v} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με $\overline{v}(z) = v(\overline{z})$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u + i\overline{v}$ είναι ακέραιη αν και μόνο αν η $v - \overline{v}$ είναι σταθερή.

3.3. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση $f = u+iv$ στον τόπο D. Δείξτε ότι

$$|\nabla u| = |\nabla v| = |f'|.$$

Επίσης δείξτε ότι η απόλυτη τιμή τής Ιακωβιανής ορίζουσας τής f (ως συνάρτησης $D \to \mathbb{R}^2$) είναι ίση με $|f'|^2$.

3.4. Έστω

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}, \quad z = x+iy \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ικανοποιεί στο 0 τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

3.5. Δείξτε ότι η $f(z) = |z|^2$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και πουθενά αλλού.

3.6. Αν $D \subset \mathbb{C}$ τόπος και $f \in H(D)$, δείξτε ότι καθεμιά από τις ακόλουθες συνθήκες συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή στο D.

(α) $f' = 0$ στο D.

(β) $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in D$

(γ) Η $|f|$ είναι σταθερή στο D

(δ) Η $\operatorname{Arg} f$ ορίζεται και είναι σταθερή στο D. ορίσματος)

3.7. Έστω $f(z) = z^3,\ z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο z_0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα πού ενώνει τα σημεία $z_1 = 1$ και $z_2 = i$ τέτοιο ώστε

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1).$$

3.8. Αν οι συναρτήσεις $f = u + iv$ και $\overline{f} = u - iv$ είναι ολόμορφες στον τόπο D, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο D.

3.9. Αν η f είναι ολόμορφη στον τόπο D και $f(D) \subset \ell$, όπου ℓ μια ευθεία, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

3.10. Αν η $u : A \to \mathbb{R}$ είναι συζυγής αρμονική τής $v : A \to \mathbb{R}$ στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, δείξτε ότι η v είναι συζυγής αρμονική τής $-u$ στο A.

3.11. Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η u είναι αρμονική.

(β) Βρείτε συζυγή αρμονική v της u.

(γ) Εκφράστε την $f = u + iv$ σαν συνάρτηση του z.

3.12. Η συνάρτηση $f = u+iv$ είναι ολόμορφη στον τόπο D. Αν για κάθε $z \in D$, ισχύει $u^2(z) - 2u(z) + v^3(z) = 3$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

3.13. Η συνάρτηση $f = u+iv$ είναι ολόμορφη στον τόπο D. Αν για κάθε $z \in D$, ισχύει $u^3(z) = v(z) + 1$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

3.14. Αν $f \in H(A)$ και $a \in A$, δείξτε ότι $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall z \in D(a,\delta)$,

$$|f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)| \leqslant \varepsilon |z-a|.$$

3.15 (Πολική μορφή των εξισώσεων Cauchy - Riemann). Δίνεται τόπος $D \subset \mathbb{C}$ και ολόμορφη συνάρτηση $f : D \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = f(r\cos\theta + ir\sin\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).$$

Έστω $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) \in D$.

(α) Δείξτε ότι οι συνθήκες Cauchy - Riemann παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = -r\frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0).$$

(β) Δείξτε ότι

$$f'(z_0) = \frac{r_0}{z_0}\left[\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + i\frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0)\right] = -\frac{i}{z_0}\left[\frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) + i\frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0)\right].$$

3.16. Δίνεται συνάρτηση f ολόμορφη στον τόπο D. Υπολογίστε τίς μερικές παραγώγους της συνάρτησης $u(x, y) = u(z) = |f(z)|^2$. Με βάση αυτόν τον υπολογισμό, δείξτε ότι αν η $|f|$ είναι σταθερή, τότε και η f είναι σταθερή στο D.

3.17. Αν η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο A, δείξτε ότι για $p > 2$

$$\frac{\partial^2\left(|u|^p\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(|v|^p\right)}{\partial y^2} = p(p-1)|u|^{p-2}|f'|^2.$$

3.18. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$, όπου το $A \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, με $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u, v : A \to \mathbb{R}$. Αν $z = x + iy$, μέσω των

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$

μπορούμε να δούμε την f ως συνάρτηση των z και $\overline{z}$, δηλαδή ως

$$f(z) = f(x + iy) = f\left(\tfrac{1}{2}(z + \overline{z}) + i\tfrac{1}{2i}(z - \overline{z})\right).$$

(α) Εφαρμόζοντας *τυπικά* τον κανόνα της αλυσίδας του Λογισμού, για παράδειγμα

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z},$$

δείξτε ότι μπορούμε να ορίσουμε τους διαφορικούς τελεστές

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(β) Αν το $A \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, τότε δείξτε ότι

$$f \in H(A) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

3.19. Έστω f ολόμορφη και αμφιμονότιμη συνάρτηση στον τόπο D. Αποδείξτε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής:

$$\int_{f(D)} g\,dxdy = \int_D g\big(f(z)\big)|f'|^2 dxdy, \quad z = x + iy,$$

όπου g τυχαία ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

3.20. Βρείτε ακέραιη συνάρτηση f τέτοια ώστε $\operatorname{Re} f(x+iy) = y^3 - 3x^2 y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3.21. Έστω $f = u+iv$ ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο D. Αν $a,b,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $au + bv = c$ στο D, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

3.22. Για τη συνάρτηση $f(z) = f(z+iy) = \sqrt{|xy|}$, δείξτε ότι οι εξισώσεις Cauchy - Riemann ισχύουν στο 0, αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

3.23. Αν $A \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτό σύνολο, $z \in A$ και $f = u + iv \in H(A)$ με τις μερικές παραγώγους των u, v να είναι συνεχείς, αποδείξτε την ταυτότητα $\big|\nabla|f|(z)\big| = |f'(z)|$.

3.24. Δίνεται συνάρτηση f, ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο A. Δείξτε ότι αν η $|f|$ είναι σταθερή στο A, τότε η f είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα τού A.

Κεφάλαιο 4

Παραδείγματα ολόμορφων συναρτήσεων

4.1 Η εκθετική συνάρτηση

Ορισμός 4.1.1. Η *εκθετική συνάρτηση* είναι η συνάρτηση $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Βασικές ιδιότητες

1. Αν $z = x \in \mathbb{R}$, τότε $e^z = e^{x+i0} = e^x$. Άρα η εκθετική συνάρτηση που τώρα ορίσαμε είναι επέκταση της γνωστής μας εκθετικής συνάρτησης του Λογισμού.

2. $|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x \cos y + ie^x \sin y| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$. Άρα,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left|e^{iy}\right| = 1.$$

3. Για $z \in \mathbb{C}$, η πολική μορφή του e^z είναι $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, δηλαδή $\arg e^z = y + 2k\pi = \operatorname{Im} z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\overline{e^z} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^x(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{\overline{z}}$.

5. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)\\
&= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)+\\
&\qquad\qquad + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)]\\
&= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)]\\
&= e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}$$

□

6. $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_2 = z_1 + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Αν $z_2 = z_1 + 2k\pi i$, τότε $e^{z_2} = e^{z_1}e^{2k\pi i} = e^{z_1}$. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $e^{z_1} = e^{z_2}$. Θέτουμε $z_2 - z_1 = a + ib$. Τότε

$$\begin{aligned}
e^{z_1} = e^{z_2} &\Rightarrow e^{z_2-z_1} = 1 \Rightarrow e^{a+ib} = 1 \Rightarrow e^a(\cos b + i\sin b) = 1\\
&\Rightarrow e^a = 1 \quad \text{και} \quad \cos b = 1,\ \sin b = 0\\
&\Rightarrow a = 0 \quad \text{και} \quad b = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\
&\Rightarrow z_2 - z_1 = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

7. Το σύνολο τιμών τής e^z είναι το $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Πράγματι, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^x > 0$, δηλαδή το 0 δεν είναι τιμή τής εκθετικής. Αν $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ με πολική μορφή $w = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, θέτουμε $x = \log r$ και $y = \vartheta$. Τότε για $z = x + iy$,

$$e^z = e^{\log r + i\vartheta} = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = w.$$

8. Επειδή $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$, $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$, η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$ γράφεται πιο σύντομα $z = re^{i\vartheta}$, $r = |z|$ και $\vartheta \in \arg z$.

9. Επειδή $e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x \sin y$, προκύπτει ότι

$$u(x,y) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Οι u, v ικανοποιούν τις Cauchy-Riemann. Άρα $e^z \in H(\mathbb{C})$. Επιπλέον,

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z.$$

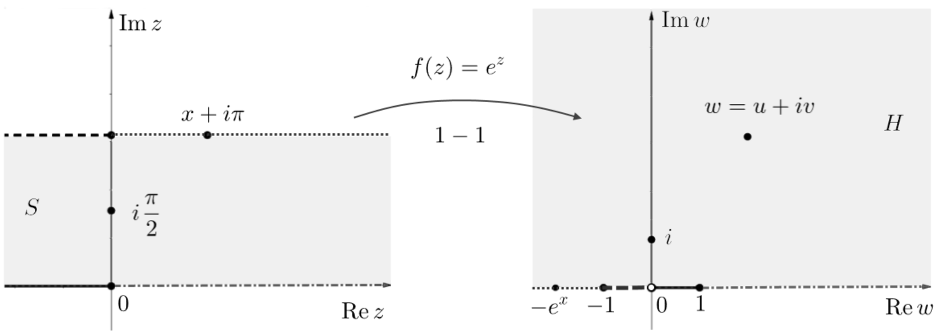
10. $e^{i\pi} = -1$.

Παράδειγμα 4.1.2. Λύστε την εξίσωση $ie^z = i - 1$.

Λύση. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδυνάμως $e^z = 1 + i$. Άρα

$$\begin{aligned} e^z = 1 + i &\Leftrightarrow e^{x+iy} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \\ &\Leftrightarrow e^x = \sqrt{2}, \quad e^{iy} = e^{i\pi/4} \\ &\Leftrightarrow x = \log\sqrt{2}, \quad y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\log 2 + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Γεωμετρικές ιδιότητες



$$e^{x+i\pi} = -e^x \in (-\infty, -1), \quad \text{αν} \quad x > 0.$$

Αν $S = \{z = x + iy \ : \ 0 < y < \pi\}$, τότε

$$f(S) = H = \{u + iv \ : \ v > 0\}.$$

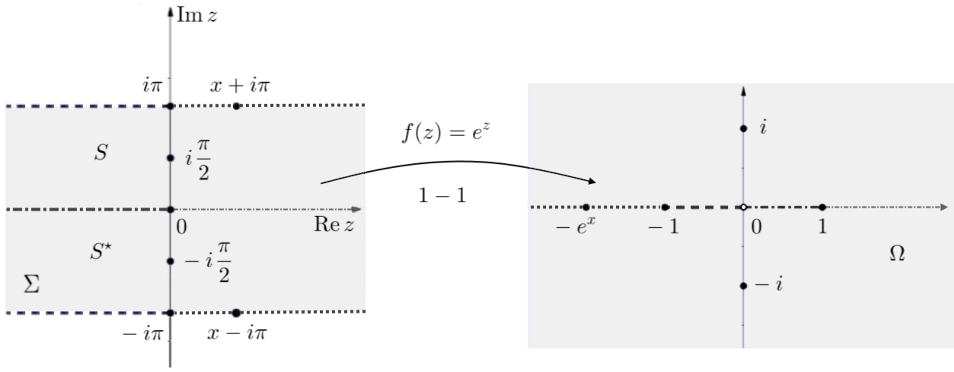
Πράγματι, αν $w = re^{i\vartheta} \in H$, θέτουμε $x = \log r \in \mathbb{R}$ και $y = \operatorname{Arg} w \in (0, \pi)$. Τότε $z = x + iy \in S$ και

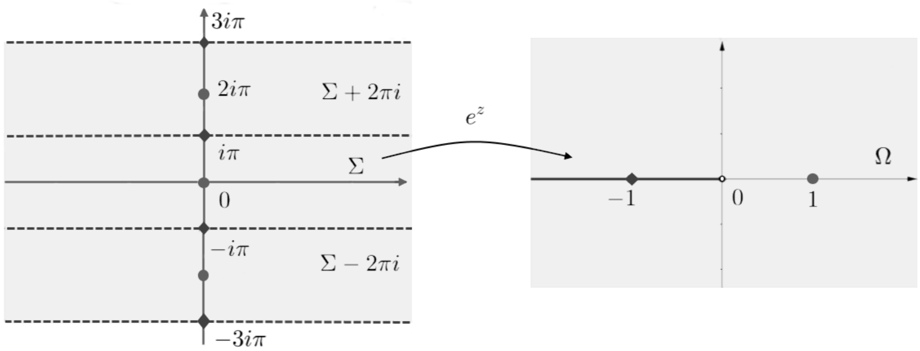
$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = re^{i \operatorname{Arg} w} = re^{i\vartheta} = w.$$

Παρομοίως, $e^z : \Sigma \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \Omega$, όπου $\Sigma = \{x + iy : -\pi < y < \pi\}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

4.2 Ο μιγαδικός λογάριθμος

Ορισμός 4.2.1. Αν $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $e^z = w$ ονομάζεται (μιγαδικός) *λογάριθμος* του w και συμβολίζεται με $\log w$.





Παράδειγμα 4.2.2. Για $w = i$, οι μιγαδικοί $z = i\frac{\pi}{2}$, $z = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi)$ είναι μιγαδικοί λογάριθμοι τού w.

Γενικότερα, αν $w = re^{i\theta}, r > 0$, τότε οι μιγαδικοί λογάριθμοι του w είναι οι αριθμοί $z = \log r + i\theta$, δηλαδή

$$\log w = \log|w| + i \arg w \qquad (\text{ισότητα συνόλων}).$$

Ορισμός 4.2.3. Η συνάρτηση

$$\operatorname{Log} w := \log|w| + i \operatorname{Arg} w, \quad w \in \Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],\ \operatorname{Arg}(w) \in (-\pi, \pi],$$

ονομάζεται *πρωτεύων κλάδος* του λογαρίθμου.

Παρατήρηση 4.2.4. Επειδή $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi]$, η Log είναι η αντίστροφη της $e^z\,|_\Sigma$:

$$\operatorname{Log} : \Omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \Sigma.$$

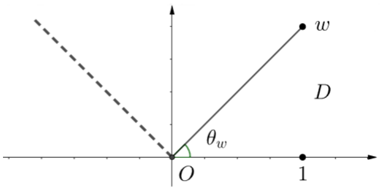
Ορισμός 4.2.5. Αν D είναι ένας τόπος, μια συνάρτηση $\mathrm{L} : D \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$e^{\mathrm{L}(w)} = w, \quad \forall w \in D,$$

ονομάζεται *κλάδος του λογαρίθμου* στον τόπο D, δηλαδή η L είναι η αντίστροφη της εκθετικής στο D.

Παρατήρηση 4.2.6. Απαραίτητη (όχι ικανή) συνθήκη για να υπάρχει κλάδος του λογαρίθμου σε ένα τόπο D είναι $0 \notin D$.

Παράδειγμα 4.2.7. Έστω $D = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\frac{3\pi}{4}} : r \geq 0\}$. Βρείτε κλάδο του λογαρίθμου στο D.



Έστω $w \in D$. Έστω $\theta_w \in \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ η γωνία των ημιευθειών $01, 0w$. Παρατηρούμε ότι αν $\theta_w \in (-\pi, 3\pi/4)$ τότε $\theta_w = \operatorname{Arg} w$, ενώ αν $\theta_w \in (-5\pi/4, -\pi]$, τότε $\theta_w = \operatorname{Arg} w - 2\pi$.

Ορίζουμε $\mathrm{L}(w) = \log|w| + i\theta_w$, $w \in D$. Τότε

$$e^{\mathrm{L}(w)} = e^{\log|w|}e^{i\theta_w} = |w|e^{i\theta_w} = \left\{ \begin{array}{l} |w|e^{i\operatorname{Arg} w} \\ |w|e^{i(\operatorname{Arg} w - 2\pi)} \end{array} \right. = w.$$

Παράδειγμα 4.2.8. Βρείτε τις τιμές $\operatorname{Log} i$, $\operatorname{Log}(5i)$, $\operatorname{Log}(1+i)$.

Λύση.

$$\operatorname{Log} i = \operatorname{Log}(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}) = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}.$$
$$\operatorname{Log}(5i) = \operatorname{Log}(5e^{i\frac{\pi}{2}}) = \log 5 + i\frac{\pi}{2}.$$
$$\operatorname{Log}(1+i) = \operatorname{Log}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

Θεώρημα 4.2.9. *Η συνάρτηση* $\operatorname{Log} : \Omega \to \Sigma$ *είναι ολόμορφη και*

$$(\operatorname{Log} w)' = \frac{1}{w}, \quad w \in \Omega.$$

Απόδειξη. Ισχύει $\operatorname{Log} w = \log|w| + i\operatorname{Arg} w$. Επειδή οι συναρτήσεις $w \mapsto \log|w|$ και $w \mapsto \operatorname{Arg} w$ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, η Log είναι συνεχής στο Ω. Επίσης, θέτοντας $w = e^z, w_0 = e^{z_0}$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\operatorname{Log}(w) - \operatorname{Log}(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{e^z - e^{z_0}} = \frac{1}{\dfrac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}} \xrightarrow[z \to z_0]{} \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}$$

διότι, λόγω συνέχειας $w \to w_0 \Rightarrow \operatorname{Log} w \to \operatorname{Log} w_0 \Rightarrow z \to z_0$. Άρα $\operatorname{Log} \in H(\Omega)$ και $(\operatorname{Log} w)' = \frac{1}{w}$ για $w \in \Omega$.

Παρατήρηση 4.2.10. Με παρόμοια απόδειξη, αν $\mathrm{L} : D \to \mathbb{C}$ συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε ένα τόπο D, τότε $\mathrm{L}'(w) = \frac{1}{w}$, $\forall w \in D$.

4.3 Μιγαδικές δυνάμεις

Ορισμός 4.3.1. Για $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ και $a \in \mathbb{C}$ ορίζουμε το σύνολο

$$z^a := e^{a \log z}.$$

Ο *πρωτεύων κλάδος* της δύναμης z^a είναι η συνάρτηση $z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$, που ορίζεται στο $\mathbb{C} \smallsetminus (-\infty, 0]$.

Παράδειγμα 4.3.2. Για $n \in \mathbb{N}$ και $z \in \mathbb{C} \smallsetminus (-\infty, 0]$ οι τιμές του z^n είναι

$$\begin{aligned} z^n &= e^{n \log z} = e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z + 2\kappa\pi i)} \\ &= e^{n(\operatorname{Log} z + 2\kappa\pi i)} = e^{n \operatorname{Log} z}. \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, αν $z = re^{i\theta}$, τότε

$$\begin{aligned} \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-φορές}} &= re^{i\theta} \cdots re^{i\theta} = r^n e^{in\theta} = r^n e^{in(\operatorname{Arg} z + 2\kappa\pi)} \\ &= r^n e^{in \operatorname{Arg} z} = e^{n \log|z| + in \operatorname{Arg} z} \\ &= e^{n(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{n \operatorname{Log} z}. \end{aligned}$$

Άρα για $n \in \mathbb{N}$, το z^n έχει μόνο μία τιμή, την $e^{n \operatorname{Log} z} = \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-φορές}}$.

Παράδειγμα 4.3.3. Υπολογίστε τις τιμές $(-i)^{1+i}$.

Λύση. Για την πρωτεύουσα τιμή έχουμε

$$\begin{aligned} (-i)^{1+i} &= e^{(1+i)\operatorname{Log}(-i)} = e^{(1+i)(-i\frac{\pi}{2})} \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -ie^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες τιμές είναι

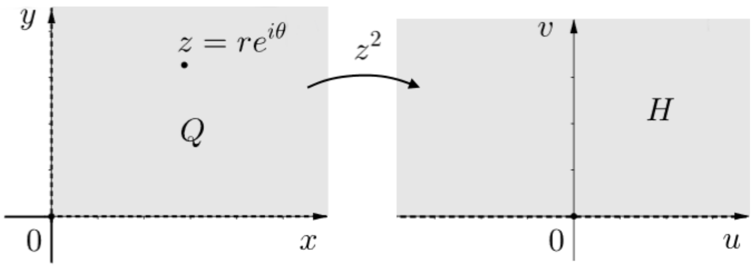
$$\begin{aligned} e^{(1+i)\log(-i)} &= e^{(1+i)(\operatorname{Log}(-i) + 2\kappa\pi i)} = -ie^{\frac{\pi}{2}} e^{(1+i)(2\kappa\pi i)} \\ &= -ie^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\kappa\pi}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.3.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = z^2$ ορισμένη στον τόπο $Q = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$. Θα δούμε ότι η f απεικονίζει το Q αμφιμονότιμα πάνω στον τόπο $H = \{u + iv : v > 0\}$.
Έστω $z \in Q$. Τότε $z = re^{i\theta}$ με $r > 0$ και $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Άρα $z^2 = r^2 e^{2i\theta} \in H$. Συνεπώς $f(Q) \subset H$.

Αν $w \in H$, τότε $w = \rho e^{i\varphi}$ με $\rho > 0$, $0 < \varphi < \pi$. Θέτουμε $z = \sqrt{\rho} e^{i\varphi/2} \in Q$. Τότε $f(z) = w$. Άρα $f(Q) = H$.

Αν $z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \in Q$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \in Q$ ($r_1, r_2 > 0$ και $0 < \theta_1, \theta_2 < \frac{\pi}{2}$) και $f(z_1) = f(z_2)$, τότε $r_1^2 e^{i2\theta_1} = r_2^2 e^{i2\theta_2}$. Άρα $r_1 = r_2$ και $\theta_1 = \theta_2$, δηλαδή $z_1 = z_2$. Επομένως η f είναι αμφιμονότιμη στο Q.

Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $f^{-1}(w) = w^{1/2}$ (πρωτεύων κλάδος) και απεικονίζει το H αμφιμονότιμα πάνω στο Q.



4.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός 4.4.1. Οι συναρτήσεις του *μιγαδικού ημιτόνου* και του *μιγαδικού συνημιτόνου* ορίζονται ως εξής: για $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι προφανώς ακέραιες.

Παράδειγμα 4.4.2. Αν $z = x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\big[\cos x + i\sin x + \cos(-x) + i\sin(-x)\big] = \cos x.$$

Παρομοίως, για $x \in \mathbb{R}$, η $\sin x$ είναι το γνωστό μας ημίτονο.

Ιδιότητες. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} &\cos(-z) = \cos z, &&\sin(-z) = -\sin z,\\ &\cos(z + 2\pi) = \cos z, &&\sin(z + 2\pi) = \sin z,\\ &e^{iz} = \cos z + i\sin z, &&\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.4.3. Η συνάρτηση $\cos z$ δεν είναι φραγμένη. Πράγματι, για $z = iy$

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \cosh y.$$

Όμως $\lim\limits_{y\to+\infty} \cosh y = +\infty$. Άρα, η $\cos(iy)$ δεν είναι φραγμένη.

Πρόταση 4.4.4. *Ισχύουν οι τύποι*

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$
$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Απόδειξη. Για παράδειγμα, για το πρώτο, από τον Ορισμό 4.4.1, έχουμε

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x+iy)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right)\\ &= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.\end{aligned}$$ □

Παράδειγμα 4.4.5.

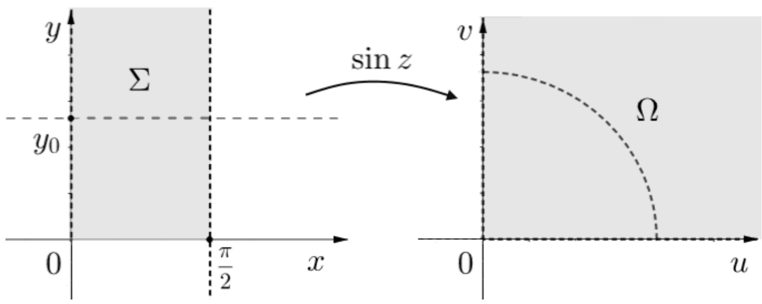
$$\cos(2+i\pi)=\frac{1}{2}\left(e^{i(2+i\pi)}+e^{-i(2+i\pi)}\right)=\cos(2)\cosh(\pi)-i\sin(2)\sinh(\pi).$$

Παράδειγμα 4.4.6. Θα δούμε ότι η συνάρτηση $f(z)=\sin z$ είναι αμφιμονότιμη στον τόπο

$$\Sigma=\{z=x+iy\ :\ 0<x<\tfrac{\pi}{2},\ y>0\}$$

και απεικονίζει τον τόπο αυτόν πάνω στον τόπο

$$\Omega=\{w=u+iv\ :\ u>0,\ v>0\}.$$



Θα δούμε πρώτα ότι η f απεικονίζει αμφιμονότιμα το ευθύγραμμο τμήμα $I=\{x+iy_0:\ 0<x<\frac{\pi}{2}\},\ y_0>0$, πάνω στην ελλειπτική καμπύλη

$$E=\left\{u+iv\ :\ \frac{u^2}{\cosh^2 y_0}+\frac{v^2}{\sinh^2 y_0}=1,\ u>0,\ v>0\right\}.$$

Πράγματι, αν $x+iy_0$ είναι ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος I, τότε

$$f(x+iy_0)=u+iv=\sin(x+iy_0)=\sin x\cosh y_0+i\cos x\sinh y_0.$$

Συνεπώς

$$\frac{u}{\cosh y_0}=\sin x\quad\text{και}\quad\frac{v}{\sinh y_0}=\cos x.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y_0}+\frac{v^2}{\sinh^2 y_0}=1.$$

Επιπλέον $u = \sin x \cosh y_0 > 0$ και $v = \cos x \sinh y_0 > 0$ διότι $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $f(x + iy_0) \in E$. Επομένως $f(I) \subset E$.

Αν $x_1 + iy_0$, $x_2 + iy_0 \in I$ και $f(x_1 + iy_0) = f(x_2 + iy_0)$ τότε

$$\sin x_1 \cosh y_0 = \sin x_2 \cosh y_0.$$

Άρα $x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι αμφιμονότιμη στο I.

Αν $u + iv \in E$, παρατηρούμε ότι $\frac{u}{\cosh y_0} \in (0, 1)$ και θέτουμε

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\cosh y_0}\right).$$

Τότε $x + iy_0 \in I$ και $f(x + iy_0) = u + iv$. Άρα $f(I) = E$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η f είναι αμφιμονότιμη στο Σ. Έστω $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2 \in \Sigma$ και $f(x_1 + iy_1) = f(x_2 + iy_2)$. Αν $y_1 \neq y_2$, τότε τα $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ βρίσκονται πάνω σε δύο διαφορετικά οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα I_1 και I_2. Όπως είδαμε, $f(I_1) = E_1$, $f(I_2) = E_2$, όπου E_1, E_2 είναι δύο ξένα τμήματα ελλείψεων. Αυτό είναι άτοπο, διότι $f(x_1 + iy_1) = f(x_2 + iy_2)$. Άρα $y_1 = y_2$, δηλαδή τα σημεία $x_1 + iy_1$ και $x_2 + iy_2$ βρίσκονται πάνω σε ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα, και όπως είδαμε, προκύπτει ότι $x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι αμφιμονότιμη στο Σ.

Τέλος δείχνουμε ότι $f(\Sigma) = \Omega$. Έστω $u_0 + iv_0 \in \Omega$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{u_0^2}{\alpha^2} + \frac{v_0^2}{\alpha^2 - 1} = 1.$$

με άγνωστο το α. Απλές αλγεβρικές πράξεις δείχνουν ότι αυτή έχει μοναδική θετική ρίζα α_0. Θέτουμε $y_0 = \cosh^{-1} \alpha_0$. Τότε $\alpha_0^2 = \cosh^2 y_0$ και $\alpha_0^2 - 1 = \sinh^2 y_0$. Άρα το σημείο $u_0 + iv_0$ βρίσκεται πάνω στην ελλειπτική καμπύλη

$$E_0 = \left\{u + iv \;:\; \frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1,\ u > 0,\ v > 0\right\}.$$

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $I_0 = \{x + iy_0 \;:\; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\} \subset \Sigma$. Τότε, όπως είδαμε, $f(I_0) = E_0$. Άρα υπάρχει σημείο $x_0 + iy_0 \in I_0 \subset \Sigma$ με $f(x_0 + iy_0) = u_0 + iv_0$. Επομένως $f(\Sigma) = \Omega$.

4.5 Υπερβολικές συναρτήσεις

Ορισμός 4.5.1. Οι συναρτήσεις του *υπερβολικού (μιγαδικού) ημιτόνου* και του *υπερβολικού (μιγαδικού) συνημιτόνου* ορίζονται ως εξής:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ιδιότητες. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα εξής:

1. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
2. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$.
3. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$.

Απόδειξη. Για παράδειγμα για την δεύτερη, έχουμε

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh(x+iy) = \cos\big(i(x+iy)\big) = \cos(-y+ix)\\ &= \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x.\end{aligned}$$

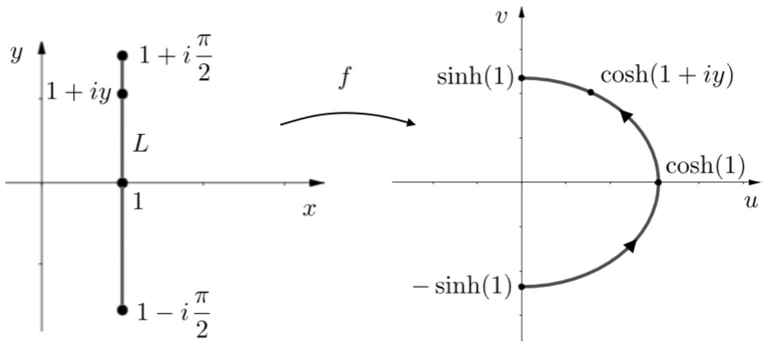
□

Παράδειγμα 4.5.2. Βρείτε την εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος

$$L = \left\{1 + iy : -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

μέσω της συνάρτησης $f(z) = \cosh z$.

Λύση.



Είναι,

$$f(1+iy) = \cosh(1+iy) = \cosh(1)\cos(y) + i\sinh(1)\sin(y).$$

Θέτουμε, $u = \cosh(1)\cos(y)$ και $v = \sinh(1)\sin(y)$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{u^2}{\cosh^2(1)} + \frac{v^2}{\sinh^2(1)} = 1.$$

Όταν το y διατρέχει το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, το σημείο (u, v) διατρέχει την ημι-έλλειψη

$$\left\{u + iv \ : \ \frac{u^2}{\cosh^2(1)} + \frac{v^2}{\sinh^2(1)} = 1, u \ge 0\right\}.$$

4.6 Ομογραφικοί μετασχηματισμοί

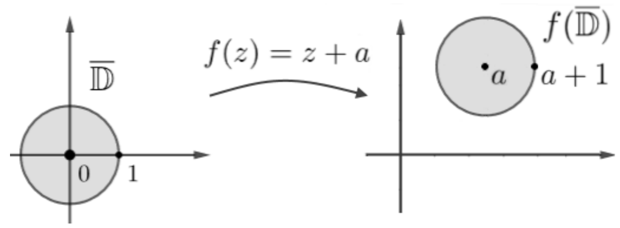
Ορισμός 4.6.1. Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ και } ad \neq bc,$$

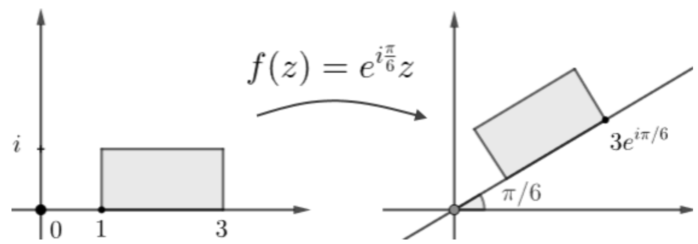
με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, για $c \neq 0$, ή το $\mathbb{C}$ αν $c = 0$, ονομάζεται *ομογραφικός μετασχηματισμός*. Κάθε ομογραφικός μετασχηματισμός είναι συνάρτηση ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, αν $c \neq 0$ (στο $\mathbb{C}$ αν $c = 0$).

Παράδειγμα 4.6.2. (Μεταφορά) $\quad f(z) = z + a, \quad a \in \mathbb{C}.$

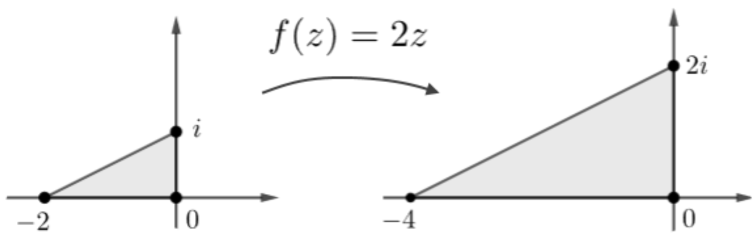
Η εικόνα του κλειστού δίσκου $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ μέσω της f είναι η μεταφορά του $\overline{\mathbb{D}}$ κατά το διάνυσμα a, δηλαδή $(x,y) \mapsto (x + \operatorname{Re} a, y + \operatorname{Im} a)$.

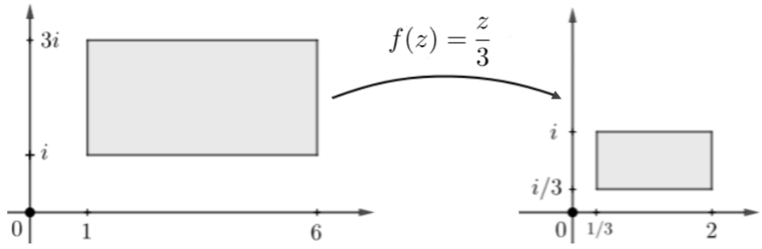


Παράδειγμα 4.6.3. (Περιστροφή) $\quad f(z) = e^{i\theta_0} z$, $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$.



Παράδειγμα 4.6.4. (Μεγέθυνση) $\quad f(z) = rz, \quad r > 1.$

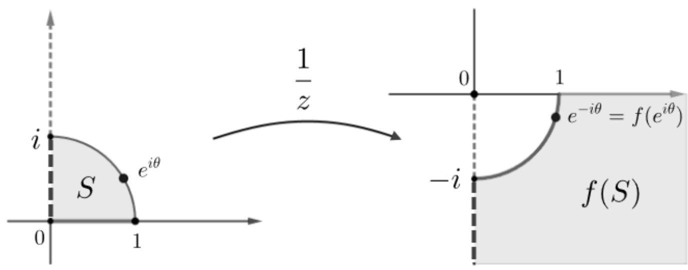


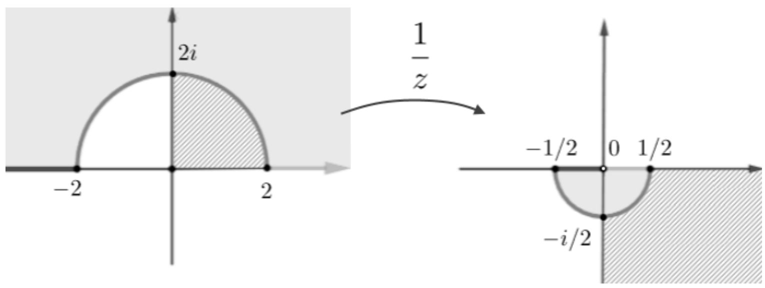


Παράδειγμα 4.6.5. (Σμίκρυνση) $\quad f(z) = rz, \quad 0 < r < 1.$

Παράδειγμα 4.6.6. (Αντιστροφή) $\quad f(z) = \frac{1}{z}, \quad f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$
Αν $z = re^{i\theta} \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$





Παρατήρηση 4.6.7.

1. Ο περιορισμός $ad \neq bc$ είναι ουσιαστικός, διότι σε αντίθετη περίπτωση ισχύει για κάθε z,

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = 0,$$

και η T είναι σταθερή συνάρτηση.

2. Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε ομογραφικός μετασχηματισμός T είναι αμφιμονότιμη συνάρτηση και μάλιστα, η αντίστροφη συνάρτηση είναι και αυτή ομογραφικός μετασχηματισμός με τύπο
$$T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}.$$

3. Για $c \neq 0$, ο ομογραφικός μετασχηματισμός $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ απεικονίζει το $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ επί του $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Αν ορίσουμε $T\big(-\frac{d}{c}\big) = \infty$ και $T(\infty) = \frac{a}{c}$, ο T επεκτείνεται σε μια αμφιμονότιμη απεικόνιση του $\widehat{\mathbb{C}}$ επί του $\widehat{\mathbb{C}}$. Για $c = 0$, ο T απεικονίζει το $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{C}$ και θέτοντας $T(\infty) = \infty$, ο T πάλι επεκτείνεται σε μια αμφιμονότιμη απεικόνιση του $\widehat{\mathbb{C}}$ επί του $\widehat{\mathbb{C}}$.

4. Η σύνθεση δύο ομογραφικών μετασχηματισμών είναι ομογραφικός μετασχηματισμός. Το σύνολο των ομογραφικών μετασχηματισμών με πράξη τη σύνθεση είναι ομάδα.

Θεώρημα 4.6.8. *Κάθε ομογραφικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση μεταφορών, μεγεθύνσεων, σμικρύνσεων, περιστροφών και αντιστροφών.*

Απόδειξη. Έστω
$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad \neq bc,$$
ένας ομογραφικός μετασχηματισμός. Αν $c = 0$, τότε
$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \left|\frac{a}{d}\right| e^{i \operatorname{Arg} \frac{a}{d}} z + \frac{b}{d}.$$
Επομένως ο T είναι σύνθεση περιστροφής - μεγέθυνσης (ή σμίκρυνσης) - μεταφοράς.

Αν $c \neq 0$, τότε
$$\begin{aligned} T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{acz+bc}{c(cz+d)} &= \frac{a(cz+d)-ad+bc}{c(cz+d)} \\ = -\frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}. & \end{aligned}$$
Η συνάρτηση $z \mapsto \frac{1}{cz+d}$ είναι σύνθεση περιστροφής - μεγέθυνσης (ή σμίκρυνσης) - μεταφοράς - αντιστροφής. Άρα ο T είναι σύνθεση συναρτήσεων της επιθυμητής μορφής. □

Ορισμός 4.6.9. Ένα σημείο $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ ονομάζεται *σταθερό σημείο* του ομογραφικού μετασχηματισμού T αν $T(a) = a$.

Θεώρημα 4.6.10. *Κάθε ομογραφικός μετασχηματισμός διαφορετικός από τον ταυτοτικό, έχει είτε ένα είτε δύο σταθερά σημεία.*

Απόδειξη. Έστω $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ένας ομογραφικός μετασχηματισμός.

Περίπτωση 1, $c = 0$. Τότε το ∞ είναι σταθερό σημείο του T. Η εξίσωση $T(z) = z$ γίνεται $(d-a)z = b$.

Αν $a \neq d$, υπάρχει και δεύτερο σταθερό σημείο, το $z = \frac{b}{d-a}$. Αν $a = d$, δεν υπάρχει άλλο σταθερό σημείο (αν $b = 0$, η T γίνεται ταυτοτική).

Περίπτωση 2, $c \neq 0$. Τότε $T(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$. Άρα όλα τα σταθερά σημεία ανήκουν στο $\mathbb{C}$. Η εξίσωση $T(z) = z$ γίνεται

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Αυτή είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού κι επομένως έχει είτε μία (διπλή) είτε δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{C}$. □

Θεώρημα 4.6.11. *Αν $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ είναι τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ είναι τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, τότε υπάρχει μοναδικός ομογραφικός μετασχηματισμός T με $T(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$.*

Απόδειξη. Περίπτωση 1. Υποθέτουμε πρώτα ότι κανένα από τα δοθέντα σημεία δεν είναι το ∞. Θεωρούμε τον ομογραφικό μετασχηματισμό

$$T_1(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Τότε $T_1(z_1) = 0$, $T_1(z_2) = 1$, $T_1(z_3) = \infty$. Παρομοίως, για τον ομογραφικό μετασχηματισμό

$$T_2(w) = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_3}$$

ισχύει $T_2(w_1) = 0$, $T_2(w_2) = 1$, $T_2(w_3) = \infty$. Άρα ο ομογραφικός μετασχηματισμός $T = T_2^{-1} \circ T_1$ απεικονίζει το z_j στο w_j, $j = 1, 2, 3$.

Περίπτωση 2. Αν ένα από τα z_j (για παράδειγμα το z_2) είναι το ∞ ενώ τα $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$, εργαζόμαστε με τον

$$T_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

και τον T_2 όπως παραπάνω.

Περίπτωση 3. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ και $w_2 = \infty$, εργαζόμαστε με τον

$$T_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3}$$

και τον T_1 όπως στην περίπτωση 1.

Περίπτωση 4. Αν $z_2 = w_2 = \infty$, θέτουμε

$$T_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{και} \quad T_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3}.$$

Για τη μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο ομογραφικοί μετασχηματισμοί T και S με $T(z_j) = w_j$ και $S(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$. Τότε ο ομογραφικός μετασχηματισμός $S^{-1} \circ T$ έχει τρία σταθερά σημεία. Άρα $S = T$. $\square$

4.7 Ασκήσεις

4.1. Δείξτε ότι $|e^z| \leq 1$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re} z \leqslant 0$. Εξετάστε πότε ισχύει η ισότητα.

4.2. Δίνεται $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^z = w$ έχει άπειρες λύσεις.

4.3. Δείξτε ότι η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει αμφιμονότιμα τον τόπο

$$\{z = x + iy \,:\, x < 0,\ 0 < y < \pi\}$$

επί του τόπου

$$\{w \in \mathbb{C} \,:\, |w| < 1,\ \operatorname{Im} w > 0\}.$$

Σχεδιάστε τους δύο τόπους.

4.4. Υπολογίστε τις παρακάτω τιμές του λογαρίθμου:

$$\log i, \quad \log(1+i), \quad \log(-2), \quad \operatorname{Log} i, \quad \operatorname{Log} 5, \quad \operatorname{Log}(e^{6\pi i}).$$

4.5. Αν $0 < a < b$ και $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi$, βρείτε την εικόνα του συνόλου

$$T = \{z \in \mathbb{C} \,:\, a \leqslant |z| \leqslant b,\ \theta_1 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \theta_2\}$$

μέσω της συνάρτησης $f(z) = \operatorname{Log} z$. Σχεδιάστε τα σύνολα T και $f(T)$.

4.6. Βρείτε την εικόνα του τόπου $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ μέσω της συνάρτησης $f(z) = z^2$.

4.7. Δείξτε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$.

4.8. Δείξτε ότι

(α) $\sin z = 0 \Rightarrow z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(β) $\cos z = 0 \Rightarrow z = \big(k + \frac{1}{2}\big)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) $\sinh z = 0 \Rightarrow z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(δ) $\cosh z = 0 \Rightarrow z = \big(k + \frac{1}{2}\big)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.9. Δίνεται ο τόπος $D = \{z = x + iy \,:\, -\pi/2 < x < \pi/2,\, y > 0\}$. Βρείτε την εικόνα του D μέσω της συνάρτησης $f(z) = \sin z$. Σχεδιάστε τα σύνολα D και $f(D)$.

4.10. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

(α) $2\sinh z_1\, \sinh z_2 = \cosh(z_1 + z_2) - \cosh(z_1 - z_2)$.

(β) $|\cosh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \cos^2 y}$.

4.11. Δείξτε ότι για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις f, η $|f|$ είναι φραγμένη στο δοθέν σύνολο $E \subset \mathbb{C}$.

(α) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $E = \{z \in \mathbb{C} :\, 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$.

(β) $f(z) = \cos z$, $E = \mathbb{R}$.

4.12. Σχεδιάστε τις εκόνες των τόπων $\mathbb{D}$ και $S = \{z = x + iy \,:\, -1 < y < 1\}$ μέσω της απεικόνισης $f(z) = 2iz - 1 + i$.

4.13. Σχεδιάστε την εικόνα του δίσκου $D\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ μέσω της απεικόνισης $f(z) = \frac{1}{z}$.

4.14.

(α) Δείξτε τον παρακάτω τύπο για το n-οστό μερικό άθροισμα της γεωμετρικής σειράς:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

(β) Χρησιμοποιώντας καταλλήλως το προηγούμενο ερώτημα, αποδείξτε ότι για $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

και

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

4.15. Έστω ω_k, $k=0,1,\dots,n-1$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας (δηλαδή οι n στο πλήθος ρίζες της εξίσωσης $z^n=1$), με $\omega_0=1$ και το σύνολο

$$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|=1\}.$$

(α) Αν $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, δείξτε ότι $\omega_k=\omega^k$, $\omega_k\in\mathbb{T}$, $\omega^{-1}=\overline{\omega}$ και $\omega^{n-k}=\overline{\omega}^k$ για $k=0,1,2,\dots,n-1$ και $n\in\mathbb{N}$.

(β) Αν C_n είναι το σύνολο των ω_k για $k=0,1,2,\dots,n-1$, $n\in\mathbb{N}$, δείξτε ότι το ζεύγος $(C_n,\cdot)$, όπου '$\cdot$' ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, αποτελεί ομάδα τάξης n (η κυκλική ομάδα).

(γ) Δείξτε ότι το ζεύγος $(\mathbb{T},\cdot)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα άπειρης τάξης, της οποίας η C_n είναι (κανονική) υπο-ομάδα.

(δ) Δείξτε ότι

$$\mathsf{S}(\omega_n):=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k=\left\{\begin{array}{ll}1, & n=1\\ 0, & n>1\end{array}\right. .$$

(ε) Δείξτε ότι τα σημεία $\omega_k\in\mathbb{C}$, $k=0,1,2,\dots,n-1$, σχηματίζουν ένα κανονικό n-γωνο στο μιγαδικό επίπεδο. Πως συνδέεται το γεγονός αυτό με το αποτέλεσμα της προηγούμενης ερώτησης;

4.16. Δείξτε ότι κάθε ομογραφικός μετασχηματισμός είναι αμφιμονότιμη συνάρτηση και απεικονίζει το $\widehat{\mathbb{C}}$ επί του $\widehat{\mathbb{C}}$.

4.17. Δείξτε ότι ο αντίστροφος του ομογραφικού μετασχηματισμού

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

είναι ο

$$T^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}.$$

4.18. Δείξτε ότι το σύνολο των ομογραφικών μετασχηματισμών με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα. Δείξτε ότι η ομάδα αυτή δεν είναι αβελιανή.

4.19. Βρείτε τον ομογραφικό μετασχηματισμό T με $T(1)=-1$, $T(i)=i$, και $T(-1)=1$.

4.20. Βρείτε τον ομογραφικό μετασχηματισμό T με $T(0)=0$, $T(1)=i$, και $T(\infty)=\infty$.

4.21. Βρείτε τον ομογραφικό μετασχηματισμό T με $T(0)=\infty$, $T(1)=1$, και $T(i)=-i$.

4.22. Δείξτε ότι κάθε μεταφορά, κάθε μεγέθυνση (ή σμίκρυνση) και κάθε περιστροφή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

4.23. Βρείτε την εικόνα του άνω ημιεπιπέδου $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ μέσω του ομογραφικού μετασχηματισμού $T(z) = iz + i$.

4.24. Βρείτε την εικόνα της ημι-λωρίδας $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$ μέσω του ομογραφικού μετασχηματισμού $T(z) = iz + 1$.

4.25. Βρείτε την εικόνα της ευθείας $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$ μέσω της αντιστροφής.

4.26. Με τους συμβολισμούς του Παραδείγματος 4.4.6, δείξτε ότι $f(\partial\Sigma) = \partial\Omega$.

4.27. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ απεικονίζει τον τόπο

$$\Sigma_1 = \left\{x + iy : -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2},\ y > 0\right\}$$

πάνω στον τόπο $\Omega_1 = \{u + iv : v > 0\}$.

4.28. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ απεικονίζει το ορθογώνιο

$$\left\{x + iy : -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2},\ -s < y < s\right\}$$

αμφιμονότιμα πάνω στο εσωτερικό της έλλειψης

$$\left\{u + iv \ :\ \frac{u^2}{\cosh^2 s} + \frac{v^2}{\sinh^2 s} = 1\right\}.$$

4.29. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \cos z$ απεικονίζει τον τόπο

$$\left\{x + iy : -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2},\ y > 0\right\}$$

αμφιμονότιμα πάνω στον τόπο $\{u + iv : u < 0,\ v < 0\}$.

4.30. Έστω $0 < \alpha < 2$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = z^\alpha$ (πρωτεύων κλάδος) απεικονίζει τον τόπο $H = \{x + iy : y > 0\}$ αμφιμονότιμα πάνω στον τόπο $D_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg} w < \alpha\pi\}$.

4.31. Δίνονται $\theta \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{D}$. Δείξτε ότι ο ομογραφικός μετασχηματισμός

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

απεικονίζει το $\mathbb{D}$ επί του $\mathbb{D}$.

4.32. Έστω ακέραιη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(z) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ και $f(1) = e$. Δείξτε ότι $f(z) = e^z$.