

Κεφάλαιο 1

Αριθμοί και Ακολουθίες

Μερικοί συμβολισμοί που θα χρησιμοποιούμε πολύ συχνά:

$\mathbb{R}$ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

$\mathbb{Q}$ Το σύνολο των ρητών αριθμών.

$\mathbb{Z}$ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

$\mathbb{N}$ Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{1, 2, \dots\}$.

1.1 Πραγματικοί αριθμοί

Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Το E ονομάζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός $b \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \quad x \leq b.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός b ονομάζεται **άνω φράγμα** του E . Ο αριθμός $M \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **μέγιστο** του E αν είναι άνω φράγμα του E και $M \in E$. Αν το E είναι άνω φραγμένο, τότε έχει πολλά άνω φράγματα. Αν έχει μέγιστο, αυτό είναι μοναδικό. Το μέγιστο του E συμβολίζεται με $\max E$.

Το E ονομάζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \quad x \geq a.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός a ονομάζεται **κάτω φράγμα** του E . Ο αριθμός $m \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **ελάχιστο** του E αν είναι κάτω φράγμα του E και $m \in E$. Το ελάχιστο του E συμβολίζεται με $\min E$. Το E ονομάζεται **φραγμένο** αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Παράδειγμα 1.1.1. Το σύνολο $= (0, 1] \cup (2, 3]$ είναι φραγμένο σύνολο και ισχύει $\max E = 3$ · το E δεν έχει ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.2. Το σύνολο $(-\infty, 2)$ δεν είναι κάτω φραγμένο είναι άνω φραγμένο αλλά δεν έχει μέγιστο.

Παράδειγμα 1.1.3. Το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο και $\min \mathbb{N} = 1$. Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ικανοποιεί το παρακάτω αξίωμα:

— **Αξίωμα της πληρότητας** —

Έστω E ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το σύνολο των άνω φραγμάτων του E έχει ελάχιστο.

Ορισμός 1.1.4. Αν E είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο, το ελάχιστο άνω φράγμα του (που υπάρχει λόγω του αξιώματος της πληρότητας) ονομάζεται **supremum** ή **άνω πέρασ** του E και συμβολίζεται με $\sup E$. Αν το E είναι μη κενό αλλά δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup E = +\infty$. Τέλος για το κενό σύνολο ορίζουμε $\sup \emptyset = -\infty$.

Πρόταση 1.1.5. Έστω E ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το σύνολο των κάτω φραγμάτων του E έχει μέγιστο.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $-E = \{-x : x \in E\}$. Το $-E$ είναι άνω φραγμένο· έστω $S = \sup(-E)$. Θα δείξουμε ότι το $-S$ είναι κάτω φράγμα του E . Έστω $x \in E$. Τότε $-x \in -E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $-x \leq S$. Άρα $x \geq -S$, δηλαδή το $-S$ είναι κάτω φράγμα του E . Τέλος αποδεικνύουμε ότι το $-S$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του E . Έστω a ένα κάτω φράγμα του E . Τότε το $-a$ είναι άνω φράγμα του $-E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $S \leq -a$, δηλαδή $a \leq -S$. $\square$

Ορισμός 1.1.6. Αν E είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο, το μέγιστο κάτω φράγμα του (που υπάρχει λόγω της Πρότασης 1.1.5) ονομάζεται **infimum** ή **κάτω πέρασ** του E και συμβολίζεται με $\inf E$. Αν το E είναι μη κενό αλλά δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε $\inf E = -\infty$. Επίσης ορίζουμε $\inf \emptyset = +\infty$.

Παρατήρηση 1.1.7. Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο· όμως κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum και infimum. Αν ένα σύνολο E έχει μέγιστο τότε $\max E = \sup E$ · αν το E έχει ελάχιστο, τότε $\min E = \inf E$.

Πρόταση 1.1.8 (Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$). (α) Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. (β) Αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $nx > y$.

Απόδειξη. (α) Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε $S := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός $S - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$: άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $S - 1 < m$, δηλαδή $S < m + 1 \in \mathbb{N}$. Άτοπο.

(β) Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής, δηλαδή $nx \leq y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο αριθμός y/x είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το (α). $\square$

Παράδειγμα 1.1.9. Έστω $E = \mathbb{N} \cup \{-1 + n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Το E δεν είναι άνω φραγμένο: άρα $\sup E = +\infty$. Επίσης $\inf E = -1$. Το E δεν έχει ούτε ελάχιστο, ούτε μέγιστο.

Παράδειγμα 1.1.10. Αν $E = (0, 1) \cup \{2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\sup E = \max E = 2$ και $\inf E = 0$. Το E δεν έχει ελάχιστο.

Πρόταση 1.1.11. (α) Αν E είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο και $S \in \mathbb{R}$, τότε

$$S = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, & x \leq S, \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists a \in E \text{ τέτοιο ώστε } a > S - \varepsilon. \end{cases} \quad (1.1)$$

(β) Αν E είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο και $s \in \mathbb{R}$, τότε

$$s = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, & x \geq s, \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists b \in E \text{ τέτοιο ώστε } b < s + \varepsilon. \end{cases} \quad (1.2)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (α). Η απόδειξη του (β) είναι παρόμοια. Έστω ότι $S = \sup E$. Τότε το S είναι άνω φράγμα του E . Άρα $\forall x \in E, x \leq S$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το S είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του E , ο αριθμός $S - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του E . Άρα υπάρχει $a \in E$ με $a > S - \varepsilon$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε: (i) $\forall x \in E, x \leq S$ και (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon$. Η (i) λέει ότι το S είναι άνω φράγμα του E . Ας υποθέσουμε ότι το S δεν είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του E . Τότε υπάρχει ένα άνω φράγμα S' του E με $S' < S$. Θέτουμε $\varepsilon = S - S'$. Λόγω της (ii) $\exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon = S'$. Άτοπο διότι το S' είναι άνω φράγμα του E . Άρα $S = \sup E$. $\square$

Πρόταση 1.1.12. Αν E είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ τέτοιες ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup E \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf E.$$

Απόδειξη. Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση που το E δεν είναι κάτω φραγμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $b_n \in E$ με $b_n \leq -n$. Άρα $b_n \rightarrow -\infty = \inf E$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι κάτω φραγμένο. Έστω $s := \inf E \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.11 (β) για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και βρίσκουμε αριθμούς $b_n \in E$ με $b_n < s + \frac{1}{n}$. Επειδή $s = \inf E$ και $b_n \in E$, έχουμε $s \leq b_n$. Άρα

$$s \leq b_n < s + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s$.

Η απόδειξη για το $\sup E$ είναι παρόμοια. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ · το ίδιο ισχύει και για το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 1.1.13. (α) Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε υπάρχουν $q \in \mathbb{Q}$ και $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q, r \in (a, b)$.

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = a$.

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $\{r_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$.

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.1.8 για $x = b - a$ και $y = 1$, βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ με $n(b - a) > 1$, δηλαδή $nb - na > 1$. Επειδή οι αριθμοί na, nb έχουν διαφορά μεγαλύτερη του 1, θα υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $na < m < nb$, δηλαδή $a < m/n < b$. Άρα για το ρητό αριθμό $q := m/n$ ισχύει $q \in (a, b)$. Για να βρούμε άρρητο στο (a, b) εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.8 για $x = (b - a)\sqrt{2}$ και $y = 1$ και εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $b = a + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε μία ακολουθία ρητών $\{q_n\}$ με $a < q_n < a + \frac{1}{n}$. Προφανώς $q_n \rightarrow a$.

(γ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με τού (β). □

Ορισμός 1.1.14. Έστω $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Ορίζουμε το *supremum* και το *infimum* της f στο E με τις ισότητες

$$\sup_{x \in E} f(x) = \sup\{f(x) : x \in E\} \quad \text{και} \quad \inf_{x \in E} f(x) = \inf\{f(x) : x \in E\}.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς $\sup_E f$ και $\inf_E f$. Ειδικά για ακολουθίες $\{a_n\}$ χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$\sup_n a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{και} \quad \inf_n a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν η συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μέγιστο (ελάχιστο), τότε ισχύει η ισότητα $\max_E f(x) = \sup_E f(x)$ ($\min_E f(x) = \inf_E f(x)$). Όπως είναι γνωστό από το Λογισμό, κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστο και ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.15. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f έχει μέγιστο στο 0. Άρα $\sup_{\mathbb{R}} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 1$. Επειδή $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, ισχύει $\inf_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Η f δεν έχει ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.16. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3}, \quad x \in [-3, \sqrt{3}]$$

ισχύει

$$\sup_{x \in [-3, \sqrt{3}]} f(x) = \max_{x \in [-3, \sqrt{3}]} f(x) = f(-3) = 6$$

και

$$\inf_{x \in [-3, \sqrt{3}]} f(x) = \min_{x \in [-3, \sqrt{3}]} f(x) = f(-1) = -\frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα 1.1.17. Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}, x \in (0, \infty)$ είναι φθίνουσα. Άρα

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, \infty)} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \\ \inf_{x \in (0, \infty)} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.18. Για την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\sup_n a_n = \max_n a_n = 1 \quad \text{και} \quad \inf_n a_n = 0.$$

Για την ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\sup_n a_n = \max_n a_n = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \inf_n a_n = \min_n a_n = -1.$$

Πρόταση 1.1.19. Αν $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ένα σημείο συσσώρευσης τού E και αν τό όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ υπάρχει, τότε

$$\inf_E f \leq \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \leq \sup_E f. \quad (1.3)$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in E$, ισχύει

$$\inf_E f \leq f(x) \leq \sup_E f.$$

Παίρνουμε το όριο για $x \rightarrow \xi$ και προκύπτει η (1.3). □

Θεώρημα 1.1.20. (α) Αν $\{a_n\}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n.$$

(β) Αν $\{b_n\}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_n b_n.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (α)· η απόδειξη του (β) είναι παρόμοια.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Έστω $M > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > M$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_o$. Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty = \sup_n a_n$.

Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη, τότε $\sup_n a_n = S \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της Πρότασης 1.1.11, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > S - \varepsilon$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, ισχύει $S \geq a_n > S - \varepsilon$, $\forall n \geq n_o$, δηλαδή $|a_n - S| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_o$. Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$. $\square$

Θεώρημα 1.1.21 (Αρχή του κιβωτισμού). Αν $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα με $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο.

Απόδειξη. Ισχύει $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, λόγω και τού Θεωρήματος 1.1.20, υπάρχουν τα όρια

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_n b_n \in \mathbb{R},$$

και μάλιστα ισχύει $a \leq b$. Θα δείξουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$. Πράγματι, αν $x \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n \leq x \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και επομένως $a \leq x \leq b$. Αντιστρόφως, αν $x \in [a, b]$, τότε $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τέλος, αν ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, τότε $a = b$. Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. $\square$

1.2 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός 1.2.1. Δύο σύνολα A, B ονομάζονται **ισοδύναμα** αν υπάρχει συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ πού είναι 1–1 και επί. Αν τα A, B είναι ισοδύναμα σύνολα, γράφουμε $A \sim B$.

Είναι προφανές ότι αν η $f: A \rightarrow B$ είναι 1–1 συνάρτηση, τότε το A είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού B . Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση $\sim$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Παράδειγμα 1.2.2. Ισχύει $\mathbb{R} \sim (-\pi/2, \pi/2)$ διότι η συνάρτηση $x \mapsto \tan^{-1} x$ απεικονίζει αμφιμονότιμα το $\mathbb{R}$ επί του $(-\pi/2, \pi/2)$.

Πρόταση 1.2.3. Αν $f: A \rightarrow B$ είναι μία συνάρτηση, τότε το $f(A)$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του A .

Απόδειξη. Έστω $y \in f(A)$. Τότε το σύνολο $f^{-1}(\{y\})$ είναι μη κενό. Επιλέγουμε ένα στοιχείο του x και ορίζουμε $g(y) := x$. Έτσι ορίζεται μια 1–1 συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow A$. Έστω $A_1 := g(f(A)) \subset A$. Η g είναι 1–1 συνάρτηση του $f(A)$ επί του A_1 . Άρα $f(A) \sim A_1$. $\square$

Πόρισμα 1.2.4. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι επί, τότε το B είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του A .

Ορισμός 1.2.5. Ένα σύνολο A ονομάζεται **πεπερασμένο** αν $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ή αν $A = \emptyset$. Αλλιώς το A ονομάζεται **άπειρο**. Ένα σύνολο A ονομάζεται **αριθμήσιμο** αν $A \sim \mathbb{N}$. Ένα σύνολο που δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο ονομάζεται **υπεραριθμήσιμο**. Αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο τότε λέμε ότι είναι **το πολύ αριθμήσιμο**.

Παράδειγμα 1.2.6. Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ με

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{αν } n \geq 1, \\ -2n + 1 & \text{αν } n \leq 0. \end{cases}$$

Η f είναι 1-1 και επί. Άρα $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.2.7. Κάθε φυσικός αριθμός k γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $k = 2^{m-1}(2n - 1)$, όπου m, n κατάλληλοι φυσικοί. Ορίζουμε $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$. Λόγω της παραπάνω παρατήρησης η f είναι επί. Εύκολα φαίνεται ότι είναι και 1–1. Άρα $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.2.8. Αν $A \subset \mathbb{N}$ και A άπειρο, τότε $A \sim \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Το A είναι άπειρο, άρα μη κενό. Έστω $x_1 = \min A$. Το $A \setminus \{x_1\}$ είναι μη κενό. Έστω $x_2 = \min(A \setminus \{x_1\})$. Το $A \setminus \{x_1, x_2\}$ είναι μη κενό. Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in A$ με $x_n = \min(A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$. Επειδή το A είναι άπειρο, το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots\}$ είναι επίσης άπειρο και επομένως μη φραγμένο.

Θα δείξουμε ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Έστω $x \in A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$. Υπάρχει ένα τουλάχιστον x_k με $x_k > x$ (διότι αν $x \leq x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε το $\{x_1, x_2, \dots\}$ θα ήταν φραγμένο). Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_1 < \dots < x_{n-1} < x < x_n$. Άτοπο διότι $x_n = \min(A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Ορίζουμε $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ με $f(x_k) = k$. Η f είναι προφανώς 1-1 και επί· άρα $A \sim \mathbb{N}$. $\square$

Παρατήρηση 1.2.9. Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε υπάρχει $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ που είναι 1-1 και επί. Θέτουμε $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Μια τέτοια γραφή του A ονομάζεται **αρίθμηση** του A .

Οι παρακάτω προτάσεις αποδεικνύονται με τη μέθοδο της απόδειξης της Πρότασης 1.2.8. Οι αποδείξεις αφήνονται για άσκηση.

Πρόταση 1.2.10. Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και $B \subset A$, τότε το B είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Πρόταση 1.2.11. Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο.

Θεώρημα 1.2.12. Αν τα σύνολα A_j , $j = 1, 2, \dots$ είναι το πολύ αριθμήσιμα, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Έστω ότι

$$A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Θεωρούμε το σύνολο $X := \{(j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a_{ji} \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f: X \rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ με $f(j, i) = a_{ji}$. Η f είναι επί. (Η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνάρτηση 1-1 διότι τα σύνολα A_j εν γένει δεν είναι ξένα). Από την Πρόταση 1.2.3, το σύνολο $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του X , άρα και του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ το οποίο είναι αριθμήσιμο. Επομένως το $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. $\square$

Παράδειγμα 1.2.13. Αν $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$ είναι προφανώς αριθμήσιμο. Όμως

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Λόγω του Θεωρήματος 1.2.12, το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 1.2.14. Το διάστημα $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ας υποθέσουμε ότι το $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο. Έστω

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$$

μια αρίθμηση του. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε τρία κλειστά διαστήματα ίσου μήκους:

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Έστω I_1 ένα από αυτά τα διαστήματα που δεν περιέχει το x_1 . Χωρίζουμε το I_1 σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και ονομάζουμε I_2 ένα από αυτά που δεν περιέχει το x_2 . Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $\{I_n\}$. Το μήκος του I_n είναι $1/3^n \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$. Από την αρχή του κιβωτισμού υπάρχει μοναδικό $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τότε $x = x_m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Άτοπο, διότι $x_m \notin I_m$. $\square$

Παράδειγμα 1.2.15. Αν $a < b$, το διάστημα (a, b) είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο διότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

απεικονίζει αμφιμονότιμα το (a, b) επί του $(0, 1)$.

Πόρισμα 1.2.16. Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει ένα διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο.

1.3 Υπακολουθίες

Ορισμός 1.3.1. Μια ακολουθία $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ονομάζεται **υπακολουθία** της ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ τέτοιοι ώστε $b_k = a_{n_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες $\{\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{n!}\}$ και $\{\frac{1}{2n}\}$ είναι όλες υπακολουθίες της $\{\frac{1}{n}\}$. Η ακολουθία $\{a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, \dots\}$ και οι ακολουθίες $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ είναι υπακολουθίες της $\{a_n\}$.

Παρατήρηση 1.3.2. Αν $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, τότε κάθε υπακολουθία της $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ .

Θεώρημα 1.3.3 (Bolzano–Weierstrass). Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό.

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}$ μία φραγμένη ακολουθία. Τότε υπάρχουν αριθμοί $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$m_1 \leq a_n \leq M_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε $I_1 = [m_1, M_1]$. Διαιρούμε το I_1 σε δύο ισομήκη κλειστά διαστήματα

$$\left[m_1, \frac{m_1 + M_1}{2} \right] \quad \text{και} \quad \left[\frac{m_1 + M_1}{2}, M_1 \right].$$

Σε ένα τουλάχιστον από αυτά τα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_2 αυτό το διάστημα. Διχοτομούμε το I_2 και παρατηρούμε πάλι ότι

σε τουλάχιστο ένα από τα υποδιαστήματα που προκύπτουν υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_3 αυτό το υποδιάστημα. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μια ακολουθία διαστημάτων

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_j \supset \cdots$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία των μηκών τους τείνει στο 0 και ότι το I_j περιέχει άπειρους όρους της $\{a_n\}$.

Από την αρχή του κιβωτισμού (Θεώρημα 1.1.21) προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $\ell \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$. Θα δείξουμε ότι μία υπακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ . Αν $k \in \mathbb{N}$, το διάστημα $(\ell - 1/k, \ell + 1/k)$ περιέχει ένα τουλάχιστον από τα διαστήματα $I_1, I_2, \dots$ (διότι όλα περιέχουν το ℓ και η ακολουθία των μηκών τους τείνει στο 0). Κατασκευάζουμε τώρα την $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ επαγωγικά ως εξής:

$$\begin{aligned} n_1 &:= \min\{n \geq 1 : a_n \in (\ell - 1, \ell + 1)\}, \\ n_k &:= \min\left\{n > n_{k-1} : a_n \in \left(\ell - \frac{1}{k}, \ell + \frac{1}{k}\right)\right\}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Τότε $|a_{n_k} - \ell| < 1/k, \forall k \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$. □

Παράδειγμα 1.3.4. Μία φραγμένη ακολουθία μπορεί να έχει πολλές συγκλίνουσες υπακολουθίες με διαφορετικά όρια. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 2, 1, -1, 2, 1, -1, 2, \dots\}$$

έχει μία υπακολουθία, την $\{a_{3n-2}\}$, που συγκλίνει στο 1, μία άλλη υπακολουθία που συγκλίνει στο -1 , και μία τρίτη υπακολουθία που συγκλίνει στο 2.

Μία ακολουθία που δεν είναι φραγμένη, ασφαλώς δεν συγκλίνει. Όμως μπορεί να έχει υπακολουθία που συγκλίνει. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ περιττός,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ άρτιος,} \end{cases}$$

δεν είναι φραγμένη, αλλά η υπακολουθία των άρτιων όρων της συγκλίνει στο 0.

Πρόταση 1.3.5. (α) Αν μία ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$.

(β) Αν μία ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο $-\infty$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (α)· η απόδειξη του (β) είναι παρόμοια. Έστω λοιπόν ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα ο αριθμός 1 δεν είναι άνω φράγμα της. Θα έχει λοιπόν όρους μεγαλύτερους του 1. Θέτουμε

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n > 1\}.$$

Ο αριθμός 2 δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας $\{a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots\}$. Θέτουμε

$$n_2 = \min\{n > n_1 : a_n > 2\}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά θέτουμε

$$n = \min\{n > n_{k-1} : a_n > k\}, \quad k = 3, 4, \dots$$

Έτσι κατασκευάσαμε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} > k$. Προφανώς ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +\infty$. $\square$

1.4 Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός 1.4.1. Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Πρόταση 1.4.2. Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = 1$ βρίσκουμε n_o τέτοιο ώστε

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Ειδικότερα, αυτό συνεπάγεται ότι

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - a_{n_o}| < 1.$$

Επομένως

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n| < 1 + |a_{n_o}|.$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_o-1}|, 1 + |a_{n_o}|\}$ και παρατηρούμε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M. \quad \square$$

Πρόταση 1.4.3. Αν μία ακολουθία Cauchy $\{a_n\}$ έχει μία υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $k_o, k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$\forall k \geq k_o, \quad |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\forall m, n \geq k_1, \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $k_2 = \max\{k_o, k_1\}$. Έστω $k \geq k_2$. Τότε $n_k \geq k \geq k_2 \geq k_o$ και άρα $|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης $n_k, k \geq k_2 \geq k_1$. Επομένως $|a_{n_k} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τελικά λοιπόν αν $k \geq k_2$, τότε έχουμε

$$|a_k - \ell| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \ell$. □

Θεώρημα 1.4.4. Μιά ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω $m, n \geq n_o$. Τότε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αντιστρόφως, έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία Cauchy. Από την Πρόταση 1.4.2, η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (θεώρημα Bolzano–Weierstrass). Λόγω της Πρότασης 1.4.3 και η ίδια η $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα. □

Παράδειγμα 1.4.5. Η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι Cauchy. Πράγματι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Αν η $\{a_n\}$ ήταν ακολουθία Cauchy, τότε για $\varepsilon = \frac{1}{3}$, θα υπήρχε $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_{2n_o} - a_{n_o}| < \frac{1}{3}$. Ατοπο. Άρα η $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

1.5 Οριακοί αριθμοί ακολουθίας

Ορισμός 1.5.1. Λέμε ότι ο επεκτεταμένος αριθμός $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ είναι **οριακός αριθμός** της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$.

Παράδειγμα 1.5.2. Η ακολουθία με όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

έχει ακριβώς δύο οριακούς αριθμούς, το 1 και το -1 .

Παράδειγμα 1.5.3. Έστω $\{a_n\}$ η ακολουθία με όρους

$$1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Κάθε φυσικός αριθμός είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$. Επίσης υπάρχει υπακολουθία της $\{a_n\}$ που συγκλίνει στο $+\infty$. Άρα και το $+\infty$ είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$. Εύκολα φαίνεται ότι η $\{a_n\}$ δεν έχει άλλους οριακούς αριθμούς. Επομένως το σύνολο των οριακών αριθμών της $\{a_n\}$ είναι το $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Παρατήρηση 1.5.4. Αν μία ακολουθία συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ℓ . Άρα η ακολουθία έχει μόνο έναν οριακό αριθμό, το ℓ .

Παρατήρηση 1.5.5. Μία ακολουθία $\{a_n\}$ έχει ένα τουλάχιστον οριακό αριθμό. Πράγματι αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη τότε έχει ένα τουλάχιστον πραγματικό οριακό αριθμό, λόγω του Θεωρήματος 1.3.3. Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι φραγμένη τότε, λόγω της Πρότασης 1.3.5, ένα τουλάχιστον από τα $+\infty, -\infty$ είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$.

Θεώρημα 1.5.6. Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο K όλων των οριακών αριθμών της $\{a_n\}$.

- (α) Αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, τότε το K είναι μη κενό φραγμένο σύνολο που έχει μέγιστο και ελάχιστο.
- (β) Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη, τότε $-\infty \in K$ και $+\infty \in K$.
- (γ) Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη, τότε $-\infty \in K$, $+\infty \notin K$ και το σύνολο $K \setminus \{-\infty\}$ είτε είναι το κενό, είτε είναι άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών που έχει μέγιστο.
- (δ) Αν η $\{a_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $+\infty \in K$, $-\infty \notin K$ και το σύνολο $K \setminus \{+\infty\}$ είτε είναι το κενό, είτε είναι κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών που έχει ελάχιστο.

Απόδειξη. (α) Το K είναι μη κενό λόγω του Θεωρήματος Bolzano–Weierstrass. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $x \in K$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \rightarrow x$. Όμως ισχύει $-M \leq a_{n_k} \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα $-M \leq x \leq M$. Επομένως το K είναι φραγμένο σύνολο.

Θέτουμε $\sup K = a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in K$. Για $k \in \mathbb{N}$, το $a - 1/k$ δεν είναι άνω φράγμα τού K . Άρα υπάρχει $\ell_k \in K$ με

$$a - \frac{1}{k} < \ell_k \leq a.$$

Επομένως σε καθένα από τα διαστήματα $(a - 1/k, a + 1/k]$, $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν άπειροι όροι τής $\{a_n\}$. Κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ ως εξής: Έστω

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a - 1, a + 1]\}, \\ n_2 &= \min\{n > n_1 : a_n \in (a - 1/2, a + 1/2]\}, \end{aligned}$$

και επαγωγικά

$$n_k = \min\{n > n_{k-1} : a_n \in (a - 1/k, a + 1/k]\}.$$

Τότε $a - 1/k < a_{n_k} \leq a + 1/k$ κι επομένως $a_{n_k} \rightarrow a$. Άρα $a \in K$ και $a = \max K$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\inf K = \min K$.

(β) Λόγω τής Πρότασης 1.3.5, η $\{a_n\}$ έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν στο ∞ και στο $-\infty$ αντίστοιχα. Άρα $+\infty, -\infty \in K$.

(γ) Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη από το $M \in \mathbb{R}$ και δεν είναι κάτω φραγμένη. Από την Πρόταση 1.3.5, ισχύει $-\infty \in K$. Έστω $\ell \in K \setminus \{-\infty\}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $a_{n_j} \rightarrow \ell$. Προφανώς $\ell \leq M$. Άρα το ℓ είναι άνω φράγμα τού $K \setminus \{-\infty\}$. Η απόδειξη ότι το $K \setminus \{-\infty\}$ (όταν δεν είναι κενό) έχει μέγιστο είναι ίδια με την αντίστοιχη απόδειξη στο (α).

(δ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με τού (γ). $\square$

Χάρη στο θεώρημα που μόλις αποδείξαμε μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5.7. Έστω $\{a_n\}$ μιá ακολουθία.

(α) Αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, τότε: Ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της ονομάζεται **ανώτερο όριο** τής $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\limsup a_n$. Ο μικρότερος οριακός αριθμός της ονομάζεται **κατώτερο όριο** τής $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\liminf a_n$.

(β) Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη, τότε θέτουμε $\limsup a_n = +\infty$ και $\liminf a_n = -\infty$.

- (γ) Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη, τότε $\liminf a_n = -\infty$.
 Αν το $-\infty$ είναι ο μοναδικός οριακός αριθμός της $\{a_n\}$, τότε $\limsup a_n = -\infty$.
 Αν η $\{a_n\}$ έχει κι άλλους οριακούς αριθμούς, τότε το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της $\{a_n\}$.
- (δ) Αν η $\{a_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $\limsup a_n = +\infty$.
 Αν το ∞ είναι ο μοναδικός οριακός αριθμός της $\{a_n\}$, τότε $\liminf a_n = +\infty$.
 Αν η $\{a_n\}$ έχει κι άλλους οριακούς αριθμούς, τότε το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος οριακός αριθμός της $\{a_n\}$.

Με συντομία μπορούμε να πούμε ότι το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της $\{a_n\}$ και το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος οριακός αριθμός της.

Παράδειγμα 1.5.8. Η ακολουθία

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη. Ισχύει $K = \{+\infty, -\infty\}$, άρα

$$\limsup a_n = +\infty \quad \text{και} \quad \liminf a_n = -\infty.$$

Παράδειγμα 1.5.9. Για την ακολουθία

$$1, 2, 3, \dots$$

ισχύει $K = \{+\infty\}$ και

$$\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n = +\infty.$$

Παράδειγμα 1.5.10. Η ακολουθία

$$a_n = 2(-1)^n + \frac{1}{2^n}$$

είναι φραγμένη και έχει ακριβώς δύο οριακούς αριθμούς: το 2 και το -2 (διότι ισχύει $a_{2n} \rightarrow 2$ και $a_{2n-1} \rightarrow -2$). Επομένως

$$\limsup a_n = 2 \quad \text{και} \quad \liminf a_n = -2.$$

Παράδειγμα 1.5.11. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Έστω $\{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση του. Θεωρούμε την ακολουθία $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ η οποία δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη. Άρα

$$\limsup q_n = +\infty, \quad \liminf q_n = -\infty.$$

Θεώρημα 1.5.12. Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

- (i) $x \leq \limsup a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.
- (ii) $x \geq \limsup a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.
- (iii) $x \geq \liminf a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.
- (iv) $x \leq \liminf a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο το (i). Η απόδειξη των (ii), (iii) και (iv) είναι ανάλογη. Για την απόδειξη του (i) θέτουμε $a = \limsup a_n$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $x \leq a$ και παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$. Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \rightarrow a$. Άρα υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $k \geq k_o$, $a_{n_k} > a - \varepsilon \geq x - \varepsilon$. Έπεται ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο, δηλαδή άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από το $x - \varepsilon$. Άρα υπάρχει μία υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} > x - \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Το θεώρημα Bolzano-Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υπακολουθία τής $\{a_{n_k}\}$ που συγκλίνει σε ένα αριθμό ℓ . Τότε ισχύει $x - \varepsilon \leq \ell \leq a$. Επειδή το ε είναι τυχαίος θετικός αριθμός, έπεται ότι $x \leq a$. $\square$

Θεώρημα 1.5.13. Δίνονται μια ακολουθία $\{a_n\}$ και ένας αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) $\lim a_n = \ell$.
- (β) $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.
- (γ) Κάθε υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ .

Απόδειξη. (γ) $\Rightarrow$ (α): Η $\{a_n\}$ είναι υπακολουθία τού εαυτού της. Άρα $a_n \rightarrow \ell$.

(α) $\Rightarrow$ (γ): Έστω ότι $a_n \rightarrow \ell$ και έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε μία υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τής $\{a_n\}$. Επειδή $a_n \rightarrow \ell$, θα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_o$. Αν $k \geq n_o$, τότε $n_k \geq k \geq n_o$. Άρα $|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. Άρα $a_{n_k} \rightarrow \ell$.

(γ) $\Rightarrow$ (β): Επειδή το $\limsup a_n$ είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$, θα υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \rightarrow \limsup a_n$. Λόγω τού (γ), θα έχουμε $\limsup a_n = \ell$. Παρομοίως $\liminf a_n = \ell$.

(β) $\Rightarrow$ (α): Παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή το $\limsup a_n$ και το $\liminf a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 1.5.12, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n > \ell + \varepsilon\} \cup \{n \in \mathbb{N} : a_n < \ell - \varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο. Επομένως υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_o$, ισχύει $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $a_n \rightarrow \ell$. $\square$

Θεώρημα 1.5.14. Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία.

- (i) Θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Τότε $\limsup a_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim b_n$.
(ii) Θέτουμε $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. Τότε $\liminf a_n = \sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim c_n$.

Απόδειξη. Η $\{b_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Άρα $b_n \rightarrow \inf b_n := b$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\limsup a_n = b$.

Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \rightarrow \limsup a_n$. Όμως $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ και $b_{n_k} \rightarrow b$. Άρα

$$\limsup a_n = \lim a_{n_k} \leq \lim b_{n_k} = b.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θα εφαρμόσουμε το (i) του Θεωρήματος 1.5.12. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $b_n \rightarrow b$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$b_n > b - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o. \quad (1.4)$$

Ειδικότερα

$$b_{n_o} = \sup\{a_k : k \geq n_o\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_1 \geq n_o$ τέτοιο ώστε $a_{k_1} > b - \varepsilon$. Εφαρμόζουμε τώρα την (1.4) για $n = k_1 + 1$ και παίρνουμε

$$b_{k_1+1} = \sup\{a_k : k \geq k_1 + 1\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_2 \geq k_1 + 1$ τέτοιο ώστε $a_{k_2} > b - \varepsilon$. Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{a_{k_j}\}$ της $\{a_k\}$ με $a_{k_j} > b - \varepsilon$. Άρα έχουμε ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > b - \varepsilon\}$ είναι άπειρο. Από το Θεώρημα 1.5.12 (i), $\limsup a_n \geq b$. Έτσι το (i) αποδείχτηκε. Το (ii) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. $\square$

Πρόταση 1.5.15. Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία με $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ισχύει

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ανισότητα· η τρίτη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο και η μεσαία είναι προφανής. Έστω

$$a := \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Προφανώς $a \geq 0$. Αν $a = 0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a > 0$ · (το a μπορεί να είναι και ∞). Παίρνουμε αριθμό b με $0 < b < a$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > b, \quad \forall k \geq N.$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες για $k = N, N + 1, \dots, n - 1$ και προκύπτει ότι για κάθε $n > N$,

$$\frac{a_n}{a_N} > b^{n-N}.$$

Παίρνουμε n -στές ρίζες και βρίσκουμε: $\sqrt[n]{a_n} > b \sqrt[n]{b^{-N} a_N}$. Άρα

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf b \sqrt[n]{b^{-N} a_N} = b.$$

Τέλος παίρνουμε όρια για $b \rightarrow a$ και προκύπτει

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq a = \liminf \frac{a_{n+1}}{n}. \quad \square$$

Παράδειγμα 1.5.16. Έστω

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός,} \\ 2^n, & n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

Τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2^{n+1}, & n \text{ περιττός,} \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

και

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός,} \\ 2, & n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

Άρα

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} = 1$$

και

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = 2, \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Παράδειγμα 1.5.17. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.5.15 στην ακολουθία $a_n = n$.

Ισχύει

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Παράδειγμα 1.5.18. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.5.15 στην ακολουθία

$$a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Ισχύει

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

1.6 Ασκήσεις

1.1 Δείξτε ότι κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο.

Υπόδειξη: Επαγωγή.

1.2 Έστω E ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με δύο τουλάχιστον σημεία.

(α) Δείξτε ότι $-\infty < \inf E < \sup E < +\infty$.

(β) Αν το A είναι μη κενό υποσύνολο του E , δείξτε ότι

$$\inf E \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup E.$$

1.3 Έστω $A \subset \mathbb{R}$ ($A \neq \emptyset$). Ορίζουμε $-A = \{x : -x \in A\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

1.4 Δίνονται δύο μη κενά σύνολα A και B στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$

$$A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\},$$

$$A \cdot B = \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Δείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{και} \quad \sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

Αν επιπλέον $A, B \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, τότε

$$\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B).$$

1.5 Για $A, B \subset \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{και} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

1.6 Για $E \subset \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $tE := \{tx : x \in E\}$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $t \geq 0$, τότε $\sup(tE) = t \sup E$ και $\inf(tE) = t \inf E$.

(β) Αν $t < 0$, τότε $\sup(tE) = t \inf E$ και $\inf(tE) = t \sup E$.

1.7 Αν f, g είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο E , δείξτε ότι

$$\inf_E (f + g) \geq \inf_E f + \inf_E g \quad \text{και} \quad \sup_E (f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g.$$

1.8 Αν S και T είναι δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $s \leq t$ για κάθε $s \in S$ και $t \in T$, δείξτε ότι $\sup S \leq \inf T$.

1.9 Βρείτε το άνω και το κάτω πέρασ των παρακάτω συνόλων.

(α) $A = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} : p, q, r \in \mathbb{N}\}.$

(β) $B = \{x : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}.$

(γ) $C = \{x : (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0\}.$

1.10 Δείξτε ότι

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\} = \sqrt{2}.$$

1.11 Βρείτε το $\sup$ και το $\inf$ των παρακάτω συνόλων.

$$A = \left\{ 2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(2 + \frac{3}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.12 Βρείτε τα $\sup A$, $\inf A$ και τα $\max A$, $\min A$ (εφόσον υπάρχουν), όπου

$$A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < 2n \right\}.$$

1.13 Υπολογίστε τα

$$\sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0\}, \quad \inf\{x + x^{-1} : x > 0\}, \quad \inf\{2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x > 0\}.$$

1.14 Βρείτε τα $\sup$ και $\inf$ των παρακάτω συνόλων.

$$A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad D = \left\{ \frac{m}{|m| + n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$E = \left\{ \frac{mn}{1 + m + n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.15 Δείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

1.16 Αποδείξτε τις Προτάσεις 1.2.10 και 1.2.11.

1.17 Δείξτε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

1.18 Δείξτε ότι αν A, B είναι δύο το πολύ αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

- 1.19** Δίνονται δύο ξένα σύνολα A και B . Δείξτε ότι αν το A είναι το πολύ αριθμήσιμο και το B είναι άπειρο σύνολο, τότε $A \cup B \sim B$.
- 1.20** Δείξτε ότι το διάστημα $(0, 1)$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$.
- 1.21** Δείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων είναι το πολύ αριθμήσιμο.
- 1.22** Δείξτε ότι το σύνολο των κύκλων στο επίπεδο με ρητή ακτίνα και κέντρα που έχουν ρητές συντεταγμένες είναι αριθμήσιμο.
- 1.23** Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.
- 1.24** Ένας αριθμός ονομάζεται *αλγεβρικός* αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Δείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.
- 1.25** Δείξτε ότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους αριθμούς και μάλιστα το σύνολο των άρρητων σε κάθε διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο.
- 1.26** Δείξτε ότι αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και το B είναι το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο του A , τότε $A \setminus B \sim A$.
- 1.27*** (Θεώρημα τού Cantor). Το *δυναμοσύνολο* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A . Δείξτε ότι κανένα σύνολο δεν είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολό του.
- 1.28** Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \rightarrow \ell$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες $\{a_{2k}\}$ και $\{a_{2k-1}\}$ συγκλίνουν στο $\ell \in \mathbb{R}$. ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).
- 1.29** Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{\arctan 1}{2} + \frac{\arctan 2}{2^2} + \dots + \frac{\arctan n}{2^n}$$

είναι Cauchy.

- 1.30** Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ και ένας φυσικός N . Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq N$, δείξτε ότι

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \quad \text{και} \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

- 1.31** Αν $\{a_n\}, \{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \limsup b_n \\ &\leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

- 1.32** Αν $\{a_n\}, \{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες με θετικούς όρους, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \liminf a_n \cdot \liminf b_n &\leq \liminf(a_n b_n) \leq \liminf a_n \cdot \limsup b_n \\ &\leq \limsup(a_n b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n. \end{aligned}$$

- 1.33** Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_n\}, \{b_n\}$. Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει, δείξτε ότι

$$\limsup(a_n + b_n) = \lim a_n + \limsup b_n$$

και

$$\liminf(a_n + b_n) = \lim a_n + \liminf b_n.$$

- 1.34** Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία. Δείξτε ότι

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$$

και

$$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

- 1.35** Αποδείξτε το Θεώρημα 1.5.14 χωρίς την υπόθεση ότι η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη.

- 1.36** Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των παρακάτω ακολουθιών:

$$\left\{2(-1)^n + \frac{1}{n!}\right\}, \quad \left\{3 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}.$$

- 1.37** Βρείτε το σύνολο των οριακών αριθμών για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[n]{4(-1)^n} + 2, & b_n &= \frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}, \\ c_n &= \frac{(1 + \cos n\pi) \log(3n) + \log n}{\log(2n)}, & d_n &= \left(\cos \frac{n\pi}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

- 1.38** Υπολογίστε τα $\limsup$ και $\liminf$ για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n n, & b_n &= n^{(-1)^n n}, \\ c_n &= 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}, & d_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}, \\ e_n &= \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}. \end{aligned}$$

- 1.39** Για μία ακολουθία $\{a_n\}$, οι υπακολουθίες $\{a_{2k}\}, \{a_{2k+1}\}$, και $\{a_{3k}\}$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η $\{a_n\}$ συγκλίνει.

- 1.40** Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\limsup a_n = x$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από $x - \varepsilon$ και πεπερασμένου πλήθους όροι είναι μεγαλύτεροι από $x + \varepsilon$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το κατώτερο όριο.
- 1.41** Αν το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός), δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη και ισχύει $\inf_n a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup_n a_n$.
- 1.42** Αν $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα με $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, τότε από την Αρχή του κιβωτισμού, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Θεωρούμε μία ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- 1.43** Δείξτε ότι αν $\lim a_n = \ell \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο $\{\ell, a_1, a_2, \dots\}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.
- 1.44** Έστω A ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\inf A = s \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το s είναι κάτω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία $\{a_n\} \subset A$ με $a_n \rightarrow s$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το άνω πέρας.
- 1.45** Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία η οποία δεν έχει μέγιστο και έστω $S = \sup a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \rightarrow S$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το κάτω πέρας.
- 1.46** Έστω $\{q_1, q_2, \dots\}$ μία αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Βρείτε το σύνολο των οριακών αριθμών της ακολουθίας $\{q_n\}$.
- 1.47** Σωστό ή Λάθος;
 (α) Αν $\{a_n\}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία, τότε κάθε υπακολουθία της είναι αύξουσα.
 (β) Υπάρχει ακολουθία που έχει άπειρους στο πλήθος οριακούς αριθμούς.
 (γ) Αν η $\{b_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$ και η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{b_n\}$, τότε η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$.
- 1.48*** Δείξτε ότι το σύνολο των οριακών αριθμών της ακολουθίας $a_n = \sin n$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$.
- 1.49*** Δείξτε ότι αν κάθε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ μιάς ακολουθίας $\{a_n\}$ έχει υπακολουθία $\{a_{n_{k_j}}\}$ συγκλίνουσα στο ℓ , τότε $a_n \rightarrow \ell$.
- 1.50*** Δίνεται μία ακολουθία $\{a_n\}$ που έχει την ιδιότητα $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{a_n\}$ έχει δύο οριακούς αριθμούς a, b με $a < b$. Δείξτε ότι κάθε αριθμός του διαστήματος $[a, b]$ είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$.

1.51 Δίνεται μια ακολουθία $\{a_n\}$. Ορίζουμε την ακολουθία $\{b_n\}$ θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

- (α) Δείξτε ότι αν $a_n \rightarrow a$, τότε $b_n \rightarrow a$.
- (β) Σωστό ή Λάθος; Αν $b_n \rightarrow a$, τότε $a_n \rightarrow a$.
- (γ)* Δείξτε ότι αν $b_n \rightarrow a$ και η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, τότε $a_n \rightarrow a$.
- (δ)* Δείξτε ότι

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq \limsup a_n.$$

1.52* Δείξτε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.

1.53* Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο x , τότε $a_n \rightarrow x$.

1.54 Για το περίβλημα $\overline{E}$ τού E ισχύει

$$\sup \overline{E} = \sup E \quad \text{και} \quad \inf \overline{E} = \inf E.$$

1.55 Ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακός αριθμός της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n \geq m$ τέτοιο ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.

1.7 Σημειώσεις

Μια πιο πλήρης εισαγωγή στους πραγματικούς αριθμούς μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [1, 6, 7, 12]. Η κατασκευή τού $\mathbb{R}$ με τις τομές Dedekind υπάρχει στα βιβλία [6, 9].

Τα αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα εισήχθησαν από τον θεμελιωτή της Θεωρίας Συνόλων, G. Cantor. Περισσότερα σχετικά θεωρήματα υπάρχουν στα βιβλία [2, 10], καθώς και στο βιβλίο [1:1].

Οι έννοιες της ακολουθίας και της υπακολουθίας παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε όλους τους κλάδους της Ανάλυσης. Για περισσότερα παραδείγματα και ασκήσεις παραπέμπουμε στα [9, 12]. Ο R. M. Dudley [1:2] σημειώνει ότι απόδειξη τού Θεωρήματος Bolzano δε βρέθηκε στα γραπτά τού Bolzano. Στα βιβλία Τοπολογίας ο αναγνώστης μπορεί να βρει γενικότερες διατυπώσεις τού Θεωρήματος αυτού· για παράδειγμα: *Κάθε ακολουθία σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Αναφορές

- [1:1] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, 1975.
- [1:2] R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Wadsworth, 1989.

Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

2.1 Σύγκλιση σειρών

Ορισμός 2.1.1. Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Η ακολουθία $\{s_n\}$ ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αν $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει στον αριθμό** s και γράφουμε

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ο αριθμός s ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς. Αν $s_n \rightarrow +\infty$ ή $s_n \rightarrow -\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει στο** $+\infty$ ή στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty.$$

Αν μία σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει**. Αν μία σειρά δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει**.

Πολλές φορές ασχολούμαστε και με σειρές της μορφής $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, όπου $N \in \mathbb{Z}$. Τότε για $n \geq N$, ορίζουμε $s_n = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n$. Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει αν η s_n συγκλίνει.

Γενικά είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το άθροισμα μιάς σειράς. Σε πολλές περιπτώσεις αρκεί να προσδιορίσουμε αν μία σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim a_n = 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Εφαρμόζοντας το κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 1.4.4) στην ακολουθία $\{s_n\}$ προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon, \quad \forall m > n \geq n_o.$$

Αν $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα. Επομένως από το Θεώρημα 1.1.20 προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.3. Υποθέτουμε ότι $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.4 (Η γεωμετρική σειρά). Για $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. δηλαδή $a_n = x^n, n = 0, 1, \dots$. Ισχύει

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n (x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Άρα

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1, \\ n+1, & x = 1. \end{cases}$$

Αν $x = 1$, τότε $s_n = n+1 \rightarrow +\infty$. Αν $x = -1$, η $\{s_n\}$ δεν συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\limsup s_n = 1$ και $\liminf s_n = 0$. Αν $x < -1$, τότε η $\{s_n\}$ δε συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\limsup s_n = +\infty$ και $\liminf s_n = -\infty$.

Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $-1 < x < 1$. Τότε $s_n \rightarrow \frac{1}{1-x}$. Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Ορισμός 2.1.5. Λέμε ότι μιά σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν μιά σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

2.2 Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Θεώρημα 2.2.1 (Κριτήριο τού ολοκληρώματος). Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f: [m, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, είναι φθίνουσα. Τότε η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^{\infty} f(x) dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$S(x) := \int_m^x f, \quad x \in [m, \infty)$$

και

$$s_n = \sum_{k=m}^n f(k), \quad n \geq m.$$

Επειδή η f είναι φθίνουσα, θα έχουμε για κάθε $k \geq m$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

Προσθέτοντας τις πρώτες ανισότητες από $k = m$ έως $k = n-1$ προκύπτει

$$s_n - f(m) \leq \int_m^n f = S(n), \quad n \geq m.$$

Προσθέτοντας τις δεύτερες ανισότητες από $k = m$ έως $k = n$ προκύπτει

$$S(n+1) = \int_m^{n+1} f \leq s_n, \quad n \geq m.$$

Άρα $S(n+1) \leq s_n \leq S(n) + f(m)$, $\forall n \geq m$. Από τις ανισότητες αυτές έπεται ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η συνάρτηση S είναι άνω φραγμένη. Επειδή

$$\int_m^{\infty} f = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x),$$

συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^{\infty} f(x) dx$ συγκλίνει. $\square$

Παράδειγμα 2.2.2. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad x \in [1, \infty)$$

στο κριτήριο τού ολοκληρώματος εύκολα βρίσκουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει και από το κριτήριο συμπύκνωσης τού Cauchy (βλ. Άσκηση 2.23).

Παράδειγμα 2.2.3. Θέτουμε

$$f(x) = \frac{1}{x \log x (\log \log x)^p}, \quad x \in [3, \infty),$$

όπου p πραγματική παράμετρος. Επειδή ο λογάριθμος είναι αύξουσα συνάρτηση, η f είναι αυστηρά φθίνουσα και θετική για $x \geq 3 > e$. Κάνοντας την αντικατάσταση $u = \log \log x$, βρίσκουμε ότι

$$\int_3^n f(x) dx = \int_{\log \log 3}^{\log \log n} \frac{1}{u^p} du.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_3^\infty f$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Από το κριτήριο του ολοκληρώματος συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Θεώρημα 2.2.4 (Κριτήριο σύγκρισης). Δίνονται οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- (α) Αν υπάρχουν $M > 0$ και $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_o$, $|a_n| \leq M b_n$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.
 (β) Αν υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $0 \leq \delta a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_o$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$q_n = \sum_{k=n_o}^n a_k, \quad s_n = \sum_{k=n_o}^n |a_k|, \quad t_n = \sum_{k=n_o}^n b_k, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_o.$$

(α) Από την υπόθεση ισχύει $s_n \leq M t_n$, $\forall n \geq n_o$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία $\{t_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα και η $\{s_n\}$ είναι φραγμένη. Η $\{s_n\}$ είναι και αύξουσα· άρα συγκλίνει. Επομένως η σειρά $\sum_{n=n_o}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Προφανώς και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, το οποίο σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε η $\{q_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Από την υπόθεση, $0 \leq \delta a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_o$ · άρα και η $\{t_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη, άρα ούτε και συγκλίνουσα. $\square$

Παράδειγμα 2.2.5. Οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{και} \quad \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να ελέγξουμε αν η υπόθεση του κριτηρίου σύγκρισης ισχύει. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να φανεί χρήσιμο το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.6 (Κριτήριο οριακής σύγκρισης). Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ θετικών αριθμών.

(α) Αν

$$\limsup \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R},$$

και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν

$$\liminf \frac{a_n}{b_n} > 0,$$

και αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Απόδειξη. (α) Εφόσον $\limsup \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\limsup \frac{a_n}{b_n} < M$. Τότε (βλ. Θεώρημα 1.5.12) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} < M, \quad \forall n \geq n_o.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Εφόσον $\liminf \frac{a_n}{b_n} > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $0 < \delta < \liminf \frac{a_n}{b_n}$. Τότε (βλ. Θεώρημα 1.5.12) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} > \delta, \quad \forall n \geq n_o.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. $\square$

Παράδειγμα 2.2.7. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2-5}$$

συγκλίνει. Πράγματι, εφαρμόζουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης με

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2-5} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Επειδή

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.2.8. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n-5}$$

αποκλίνει. Αυτό προκύπτει από την εφαρμογή του κριτηρίου οριακής σύγκρισης με

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n-5} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Θεώρημα 2.2.9 (Κριτήριο τής ρίζας). Δίνεται η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(α) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, η σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη. (α) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, μπορούμε να διαλέξουμε b τέτοιο ώστε $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < b < 1$. Από το Θεώρημα 1.5.12, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{|a_n|} < b, \quad \forall n \geq n_o.$$

Άρα $|a_n| < b^n$, $\forall n \geq n_o$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

(β) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, τότε $|a_n| > 1$ για άπειρα n . Άρα η ακολουθία $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει στο 0. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. $\square$

Θεώρημα 2.2.10 (Κριτήριο του λόγου). Δίνεται η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(α) Αν

$$\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

η σειρά συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

η σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.5.15 έχουμε

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Έτσι το κριτήριο του λόγου είναι άμεση συνέπεια του κριτηρίου της ρίζας. $\square$

Παράδειγμα 2.2.11. Για τη σειρά

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

έχουμε $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$ και $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{3^k} = 0,$$

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{2^{k+1}} = +\infty.$$

Το κριτήριο του λόγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί, ενώ από το κριτήριο της ρίζας συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση 2.2.12. Το κριτήριο του λόγου είναι συχνά πιά εύχρηστο, πιά εύκολο στην εφαρμογή του. Όμως το κριτήριο της ρίζας είναι ισχυρότερο: όποτε το κριτήριο του λόγου δίνει σύγκλιση, τότε και το κριτήριο της ρίζας δίνει σύγκλιση· όποτε το κριτήριο της ρίζας δεν οδηγεί σε συμπέρασμα, ούτε το κριτήριο του λόγου οδηγεί σε συμπέρασμα· (βλ. απόδειξη του κριτηρίου του λόγου). Τέλος, υπάρχουν περιπτώσεις που το κριτήριο του λόγου δεν οδηγεί σε συμπέρασμα, ενώ το κριτήριο της ρίζας δίνει σύγκλιση· βλ. Παράδειγμα 2.2.11.

Θεώρημα 2.2.13 (Κριτήριο για εναλλάσσουσες σειρές). Υποθέτουμε ότι $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ και ότι $\lim a_n = 0$. Τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{s_{2n}\}$ είναι αύξουσα.

Επίσης, για $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} \\ &= a_1 - [(a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}] \\ &\leq a_1, \end{aligned}$$

δηλαδή η $\{s_{2n}\}$ είναι άνω φραγμένη. Θέτουμε $s := \lim s_{2n}$. Τότε

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + a_{2n+1}) = s + 0 = s.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} = s.$$

Από την Άσκηση 1.28 προκύπτει ότι η $\{s_n\}$ είναι συγκλίνουσα και $\lim s_n = s$. $\square$

Παράδειγμα 2.2.14. Η σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$$

συγκλίνει σε κάποιο αριθμό s . Επειδή $s_2 = 1/2$ και η ακολουθία $\{s_{2n}\}$ είναι αύξουσα, ισχύει $s \geq 1/2$.

2.3 Αναδιατάξεις σειρών

Ορισμός 2.3.1. Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Μιά ακολουθία $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται **αναδιάταξη** τής $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $\mathbb{N} \ni n \mapsto k(n) \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$b_n = a_{k(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αναδιάταξη τής $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ονομάζεται **αναδιάταξη της σειράς** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Παράδειγμα 2.3.2. Η ακολουθία

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots$$

και η ακολουθία

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}, \dots$$

είναι και οι δύο αναδιατάξεις της ακολουθίας $\{\frac{1}{n}\}$.

Παράδειγμα 2.3.3. Θεωρούμε την εναλλάσσουσα αρμονική σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Όπως είναι γνωστό από την προηγούμενη παράγραφο, η σειρά αυτή συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως. Επίσης για το άθροισμά της s ισχύει $s > 0$. βλ. Παράδειγμα 2.2.14.

Θεωρούμε και την αναδιάταξη

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - - + \dots \quad (2.1)$$

πού προκύπτει με την διαδοχική άθροιση ενός θετικού όρου και δύο αρνητικών. Συμβολίζουμε με s_n και με σ_n τα μερικά αθροίσματα της αρχικής σειράς και της αναδιάταξης της, αντιστοίχως. Ισχύει

$$\begin{aligned} \sigma_{3n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} s_{2n}. \end{aligned}$$

Αρα $\lim \sigma_{3n} = \frac{1}{2} \lim s_{2n} = \frac{1}{2} s$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\lim \sigma_{3n-1} = \lim \sigma_{3n-2} = \lim \sigma_{3n} = \frac{1}{2} s.$$

Συνεπώς (γιατί;) η σειρά (2.1) συγκλίνει και μάλιστα το άθροισμά της είναι $\frac{1}{2}s \neq s$.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι η αναδιάταξη μιάς σειράς μπορεί να έχει άθροισμα διαφορετικό από αυτό της αρχικής σειράς. Το φαινόμενο αυτό – όπως δείχνουν τα ακόλουθα θεωρήματα – είναι χαρακτηριστικό των σειρών που συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απολύτως.

Θεώρημα 2.3.4. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε όλες οι αναδιατάξεις της συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω s_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω σ_n τα μερικά αθροίσματα μιάς αναδιάταξής της $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$.

Από το κριτήριο τού Cauchy υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $m > n \geq n_o$, $\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon/2$. Παίρνουμε όριο για $m \rightarrow \infty$ και προκύπτει

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o. \quad (2.2)$$

Διαλέγουμε $p \in \mathbb{N}$ αρκούντως μεγάλο ώστε οι φυσικοί $1, 2, \dots, n_o$ να περιέχονται όλοι στο σύνολο

$$\{k(1), k(2), \dots, k(p)\}.$$

Εξετάζουμε τώρα τη διαφορά $|\sigma_n - s_n|$ για $n \geq p$. Οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{n_o}$ απλοποιούνται κι έτσι, λόγω της (2.2), προκύπτει

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s_n| &= |a_{k(1)} + \dots + a_{k(n)} - (a_1 + \dots + a_n)| \\ &\leq |a_{n_o+1}| + |a_{n_o+2}| + \dots < \varepsilon. \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για $n \geq p$, ισχύει $|\sigma_n - s_n| < \varepsilon$, δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - \sigma_n) = 0.$$

Εφόσον η $\{s_n\}$ συγκλίνει, και η $\{\sigma_n\}$ θα συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο. $\square$

Θεώρημα 2.3.5 (Riemann). Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μιά σειρά που συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$, υπάρχει αναδιάταξη της $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s.$$

Απόδειξη. Έστω $s \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $s \geq 0$. Η περίπτωση $s < 0$ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει απολύτως, η ακολουθία $\{a_n\}$ έχει άπειρους θετικούς και άπειρους αρνητικούς όρους. Έστω $\{p_n\}$ η ακολουθία των θετικών όρων και έστω $\{q_n\}$ η ακολουθία των αρνητικών όρων της $\{a_n\}$ με τη σειρά που εμφανίζονται. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και οι $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ είναι υπακολουθίες της $\{a_n\}$, έχουμε

$$\lim p_n = \lim q_n = 0. \quad (2.3)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty. \quad (2.4)$$

Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p < \infty$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n_o+1}^{\infty} p_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=n_o+1}^{\infty} |q_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε φυσικό n_1 αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\} \supset \{q_1, q_2, \dots, q_{n_o}, p_1, p_2, \dots, p_{n_o}\}.$$

Άρα για κάθε $m > n \geq n_1$,

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=n_o+1}^{\infty} p_k + \sum_{k=n_o+1}^{\infty} |q_k| < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο σύγκλισης τού Cauchy, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Άτοπο.

Περίπτωση 2: $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geq N, \quad \sum_{k=1}^n q_k < -M - p.$$

Επιλέγουμε φυσικό $n_o \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\{q_1, q_2, \dots, q_N\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_{n_o}\}.$$

Αν $n \geq n_o$, το άθροισμα $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ περιέχει περισσότερους από N όρους τής $\{q_n\}$ και κάποιους όρους τής $\{p_n\}$. Οι όροι τής $\{q_n\}$ έχουν άθροισμα μικρότερο τού $-M - p$, ενώ οι όροι τής $\{p_n\}$ έχουν άθροισμα μικρότερο τού p . Άρα

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < (-M - p) + p = -M.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$. Άτοπο.

Έτσι σε κάθε περίπτωση, η (2.4) αποδείχθηκε. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty. \quad (2.5)$$

Κατασκευάζουμε τώρα την αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ως εξής: Ξεκινούμε με τον όρο p_1 και προσθέτουμε τόσους όρους της $\{p_n\}$ όσους απαιτούνται για να ξεπεράσουμε τον αριθμό s . Στη συνέχεια προσθέτουμε τόσους (αρνητικούς) όρους της $\{q_n\}$ όσους απαιτούνται ώστε το άθροισμα να γίνει μικρότερο τού s . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε λόγω των (2.4) και (2.5). Μετά προσθέτουμε όρους της

$\{p_n\}$ ώστε να ξαναξεπεράσουμε το s . Ύστερα προσθέτουμε πάλι όρους της $\{q_n\}$ ώστε το άθροισμα να ξαναγίνει μικρότερο του s κ.ο.κ.. Έτσι δημιουργούμε μια αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με μερικά αθροίσματα σ_n . Είναι προφανές ότι

$$|\sigma_n - s| \leq \max\{p_{n_k}, |q_{n_m}|\},$$

όπου $\{p_{n_k}\}$, $\{q_{n_m}\}$ είναι υπακολουθίες των $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ αντιστοίχως. Λόγω της (2.3), ισχύει $\lim \sigma_n = s$. $\square$

2.4 Παραστάσεις αριθμών

Κάθε δεκαδικός αριθμός $x = 0.k_1k_2 \dots$ είναι **εξ ορισμού** το άθροισμα μιάς σειράς, δηλαδή

$$x = \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \dots$$

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός $x \in (0, 1)$ έχει μιά δεκαδική παράσταση όπως η παραπάνω.

Πρόταση 2.4.1. Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$. Αν για τους όρους της ακολουθίας $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει $0 \leq k_n \leq p-1$, τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}$$

συγκλίνει προς έναν αριθμό που ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$.

Απόδειξη. Επειδή ο γενικός όρος της σειράς είναι μη αρνητικός, αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός 1 είναι άνω φράγμα της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Πράγματι

$$\sum_{n=1}^N \frac{k_n}{p^n} \leq \sum_{n=1}^N \frac{p-1}{p^n} \leq (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = 1. \quad \square$$

Πρόταση 2.4.2. Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $x \in (0, 1]$. Υπάρχει μοναδική ακολουθία ακεραίων αριθμών $\{k_n\}$ τέτοια ώστε:

(α) $0 \leq k_n \leq p-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(β) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}$,

(γ) $k_n \neq 0$ για άπειρα n .

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{k_n\}$ επαγωγικά: Έστω k_1 ο μεγαλύτερος ακέραιος με $k_1/p < x$. Τότε $0 \leq k_1 \leq p-1$ και $k_1/p < x \leq (k_1+1)/p$. Έστω k_2 ο μεγαλύτερος ακέραιος με

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} < x.$$

Τότε ισχύει $0 \leq k_2 \leq p-1$ και

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} < x \leq \frac{k_1}{p} + \frac{k_2+1}{p^2}.$$

Συνεχίζοντας έτσι προκύπτει μια ακολουθία ακεραίων $\{k_n\}$ για την οποία ισχύει $0 \leq k_n \leq p-1$ και

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n}{p^n} < x \leq \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n+1}{p^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Επομένως

$$0 < x - \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{p^j} \leq \frac{1}{p^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Παίρνοντας όρια για $n \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}. \quad (2.8)$$

Αν υπήρχε $j_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k_j = 0, \forall j \geq j_0$, τότε η (2.7) θα ερχόταν σε αντίθεση με την (2.8). Άρα υπάρχουν άπειρα n για τα οποία $k_n \neq 0$.

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα. Έστω ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} \quad (2.9)$$

με $0 \leq a_n \leq p-1, 0 \leq b_n \leq p-1, \forall n \in \mathbb{N}$ και άπειρα από τα a_n και από τα b_n είναι μη μηδενικά. Έστω m ο πρώτος δείκτης για τον οποίο $a_m \neq b_m$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_m > b_m$, δηλαδή ότι $a_m \geq b_m + 1$. Από την (2.7) προκύπτει ότι

$$\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_m}{p^m} < x \leq \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_m+1}{p^m}. \quad (2.10)$$

και

$$\frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m}{p^m} < x \leq \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m+1}{p^m}. \quad (2.11)$$

Άρα

$$x > \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_m}{p^m} \geq \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m + 1}{p^m} \geq x.$$

Άτοπο. □

Για έναν αριθμό $x \in (0, 1]$, αν ισχύει

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}$$

με $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $0 \leq k_n \leq p-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε η παραπάνω σειρά ονομάζεται p -αδική (ή παιδική!) παράσταση του x . Συνήθως γράφουμε $x = 0.k_1k_2k_3 \dots$ (βάση p) ή $x = 0._pk_1k_2k_3 \dots$. Αν $k_n = 0$ από ένα δείκτη και πέρα, τότε η παράσταση λέγεται τερματιζόμενη. Η Πρόταση 2.4.2 εγγυάται την ύπαρξη για κάθε $x \in (0, 1]$ μίας και μοναδικής μη τερματιζόμενης παράστασης του x . Υπάρχουν όμως $x \in (0, 1)$ με δύο p -αδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, ισχύει

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{4}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n},$$

δηλαδή $1/2 = 0.5000 \dots = 0.4999 \dots$ (βάση 10).

Πρόταση 2.4.3. Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $x \in (0, 1)$. Ο x έχει τερματιζόμενη p -αδική παράσταση αν και μόνο αν είναι της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Αν το x έχει τερματιζόμενη παράσταση τότε

$$x = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n}{p^n},$$

δηλαδή $x = \frac{m}{p^n}$ με $m = k_1p^{n-1} + \cdots + k_{n-1}p + k_n \in \mathbb{N}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $x = \frac{m}{p^n}$. Από τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, έχουμε ότι $m = k_1p^{n-1} + \cdots + k_{n-1}p + k_n$ για κατάλληλους ακραίους k_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Άρα

$$x = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n}{p^n},$$

δηλαδή $x = 0.k_1 \dots k_n$ (βάση p). □

Μπορεί να αποδειχθεί επιπλέον (βλ. Άσκηση 2.31) ότι οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$ έχουν μοναδική τερματιζόμενη p -αδική παράσταση.

Παράδειγμα 2.4.4. Χρησιμοποιώντας τις δεκαδικές παραστάσεις αριθμών μπορούμε να δώσουμε μία δεύτερη απόδειξη τού Θεωρήματος 1.2.14 (δηλαδή ότι το διάστημα $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο).

Απόδειξη: Το $(0, 1)$ δεν είναι πεπερασμένο σύνολο αφού περιέχει όλους τους αριθμούς της μορφής $\frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$. Ας υποθέσουμε ότι το $(0, 1)$ είναι αριθμήσιμο. Έστω

$$(0, 1) = \{a_1, a_2, \dots\}$$

μία αριθμήσή του. Έστω

$$a_j = 0.a_{j1}a_{j2}a_{j3}\dots$$

η μη τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση του a_j , $j = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε τον αριθμό $b \in (0, 1)$ με μη τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση

$$b = 0.b_1b_2\dots,$$

όπου

$$b_k = \begin{cases} 3, & \text{αν } a_{kk} \neq 3, \\ 5, & \text{αν } a_{kk} = 3. \end{cases}$$

Τότε $b \neq a_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ διότι οι b και a_j διαφέρουν στο j -στο δεκαδικό ψηφίο· εδώ χρησιμοποιείται η μοναδικότητα της μη τερματιζόμενης δεκαδικής παράστασης (βλ. Πρόταση 2.4.2). Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο. Άρα το $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο. $\square$

2.5 Το σύνολο και η συνάρτηση τού Cantor

Το σύνολο τού Cantor είναι υποσύνολο τού διαστήματος $[0, 1]$. Έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες και χρησιμοποιείται συχνά ως αντιπαράδειγμα. Η κατασκευή του γίνεται ως εξής:

Έστω $I_0 = [0, 1]$. Αφαιρούμε από το I_0 το διάστημα $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ και θέτουμε

$$I_1 = I_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Αφαιρούμε από τα διαστήματα $[0, \frac{1}{3}]$ και $[\frac{2}{3}, 1]$ το μεσαίο τους ανοικτό διάστημα και προκύπτει το σύνολο

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία προκύπτει μία ακολουθία κλειστών συνόλων I_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ τέτοια ώστε

(α) $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$.

(β) Το I_n είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα.

Ορισμός 2.5.1. Το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

ονομάζεται (τριαδικό) σύνολο του Cantor.

Παρατήρηση 2.5.2. (α) Το C είναι κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών συνόλων.

(β) Το C δεν είναι το κενό σύνολο διότι $0 \in C$ και $1 \in C$. Μάλιστα το C είναι άπειρο σύνολο. Πραγματικά τα άκρα των διαστημάτων I_n ουδέποτε αφαιρούνται κατά την κατασκευή του C . Δηλαδή τα σημεία

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots$$

ανήκουν όλα στο C . Ονομάζουμε αυτά τα σημεία *ακραία σημεία του C* .

(γ) Τα ακραία σημεία του C είναι σημεία της μορφής $\frac{m}{3^n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Παρατηρούμε ότι, αν εξαιρέσουμε το 0 και το 1, αυτά είναι σημεία του $(0, 1)$ που έχουν δύο τριαδικές παραστάσεις.

Θεώρημα 2.5.3. Το σύνολο $[0, 1] \setminus C$ είναι ένωση αριθμήσιμων πλήθους, ξένων ανά δύο, ανοικτών διαστημάτων συνολικού μήκους 1.

Απόδειξη. Θέτουμε $J_n = I_{n-1} \setminus I_n$, $n = 1, 2, \dots$, δηλαδή το J_n είναι το σύνολο που αφαιρούμε από το I_{n-1} ώστε να προκύψει το I_n . Το J_n είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανά δύο, ανοικτών μεσαίων διαστημάτων. Καθένα από αυτά έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Έτσι ισχύει

$$[0, 1] \setminus I_n = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_n.$$

Άρα

$$\begin{aligned} [0, 1] \setminus C &= [0, 1] \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0, 1] \setminus I_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n. \end{aligned}$$

Τα J_n είναι ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα. Κάθε J_n είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα. Άρα το $[0, 1] \setminus C$ είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους, ξένων ανά δύο, ανοικτών διαστημάτων. Το συνολικό μήκος των διαστημάτων αυτών είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1. \quad \square$$

Μελετούμε τώρα τις τριαδικές παραστάσεις των στοιχείων τού C . Βρίσκουμε πρώτα τις τριαδικές παραστάσεις των ακραίων σημείων τού $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

$$0 = 0.3000 \dots$$

$$\frac{1}{3} = 0.31 = 0.30222 \dots$$

$$\frac{2}{3} = 0.32 = 0.31222 \dots$$

$$1 = 1.300 \dots = 0.3222 \dots$$

Άρα τα ακραία σημεία τού I_1 έχουν μία τουλάχιστον τριαδική παράσταση με ψηφία μόνο 0 και 2 (και όχι 1).

Έστω $x \in [0, \frac{1}{3}]$ και $x = 0.3a_1a_2 \dots$ μία τριαδική παράσταση τού x . Αν $a_1 = 1$, τότε $x = 0.31a_2a_3 \dots \geq 0.31 = \frac{1}{3}$. Άτοπο. Αν $a_1 = 2$, τότε $x = 0.32a_2a_3 \dots > 0.31 = \frac{1}{3}$. Άτοπο. Άρα $a_1 = 0$. Αντιστρόφως: αν $a_1 = 0$, τότε

$$0 \leq x = 0.30a_2a_3 \dots \leq 0.30222 \dots = \frac{1}{3},$$

δηλαδή $x \in [0, \frac{1}{3}]$.

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ αν και μόνο αν για μία τριαδική παράσταση του x ισχύει $a_1 = 2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $x \in I_1$ αν και μόνο αν για μία τριαδική παράσταση του x ισχύει $a_1 = 0$ ή $a_1 = 2$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για το δεύτερο ψηφίο a_2 και βρίσκουμε ότι $x \in I_2$ αν και μόνο αν $a_j = 0$ ή $a_j = 2$ για $j = 1, 2$. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι γενικότερα ισχύει $x \in I_n$ αν και μόνο αν $a_j = 0$ ή $a_j = 2$ για $j = 1, 2, \dots, n$. Καταλήγουμε επομένως στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.4. Ένας αριθμός $x \in [0, 1]$ ανήκει στο σύνολο C αν και μόνο αν $x = 0.3a_1a_2 \dots$ με $a_k \in \{0, 2\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα αυτόν τον χαρακτηρισμό των σημείων του C για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τού Cantor είναι υπεραριθμήσιμο.

Θεώρημα 2.5.5. Το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f: C \rightarrow [0, 1]$ ως εξής: Έστω $x \in C$. Το x έχει μία τριαδική παράσταση $x = 0.3k_1k_2 \dots$ με $k_j \in \{0, 2\}$, $j = 1, 2, \dots$. Ορίζουμε

$$f(x) = f(0.3k_1k_2 \dots) = 0.2 \frac{k_1}{2} \frac{k_2}{2} \dots$$

Η f απεικονίζει το C επί τού $[0, 1]$. Άρα (βλ. Πρόταση 1.2.3) το $[0, 1]$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού C . Επομένως το C είναι υπεραριθμήσιμο. $\square$

Η συνάρτηση f στην παραπάνω απόδειξη δεν είναι 1-1. Για παράδειγμα, ισχύει

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0.30222\dots) = 0.20111\dots = 0.21 = \frac{1}{2}.$$

και

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(0.32) = 0.21 = \frac{1}{2}.$$

Γενικότερα η f παίρνει την ίδια τιμή στα άκρα κάθε μεσαίου ανοικτού διαστήματος που αφαιρείται κατά την κατασκευή του C . Πράγματι, τα αφαιρούμενα διαστήματα είναι της μορφής

$$(0.3a_1a_2\dots a_m1, 0.3a_1a_2\dots a_m2),$$

όπου $a_j \in \{0, 2\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Επομένως

$$\begin{aligned} f(0.3a_1a_2\dots a_m1) &= f(0.3a_1a_2\dots a_m0222\dots) = 0.2\frac{a_1}{2}\dots\frac{a_m}{2}0111\dots \\ &= 0.2\frac{a_1}{2}\dots\frac{a_m}{2}1 \\ &= f(0.3a_1a_2\dots a_m2). \end{aligned}$$

Επεκτείνουμε τώρα την f στο $[0, 1]$: Έστω $x \in [0, 1] \setminus C$. Τότε το x ανήκει σε ένα από τα αφαιρούμενα μεσαία διαστήματα (a, b) . Όπως είδαμε $f(a) = f(b)$. Θέτουμε $f(x) := f(a) = f(b)$.

Ορισμός 2.5.6. Η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ που ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται συνάρτηση του Cantor.

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση του Cantor είναι αύξουσα. Στις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου αλλά και στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε πολλές ακόμα ιδιότητες του συνόλου και της συνάρτησης του Cantor.

2.6 Ασκήσεις

2.1 Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim a_n = 0$.

2.2 Βρείτε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

- 2.3** Δίνονται δύο συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και ένας αριθμός $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνουν και μάλιστα

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- 2.4** Δείξτε ότι αν μία σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.
- 2.5** Μία σειρά έχει μερικά αθροίσματα s_n . Δείξτε ότι η σύγκλιση της $\{s_n\}$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\{|s_n|\}$. Ισχύει το αντίστροφο;
- 2.6** Βρείτε για ποιές τιμές του x συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές αρχίζοντας με τα κριτήρια του λόγου και της ρίζας.

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n.$$

- 2.7** Εξετάστε τη σύγκλιση ή την απόκλιση των σειρών

$$(\alpha) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^2}{(n+2)!}, \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}.$$

- 2.8** Βρείτε δύο ακολουθίες θετικών αριθμών $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ τέτοιες ώστε

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{b_n} = 1$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

- 2.9** Βρείτε δύο ακολουθίες θετικών αριθμών $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ τέτοιες ώστε

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

- 2.10** Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

με τα κριτήρια του λόγου και της ρίζας.

- 2.11** Δείξτε ότι αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

συγκλίνουν.

2.12 Εξετάστε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

$$\begin{aligned}
 &(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2}, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n(n+1)}, \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^2, \\
 &(\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad (\epsilon) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \frac{n+1}{n-1}, \quad (\sigma\tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}, \\
 &(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} -\log \left(\cos \frac{1}{n} \right).
 \end{aligned}$$

2.13 Δίνεται ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} n^{-p}$ συγκλίνει όταν $p > \frac{1}{2}$.

(β) Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι το (α) δεν ισχύει για $p = \frac{1}{2}$.

2.14 Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ αποκλίνει.

2.15 Δίνεται η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Δείξτε ότι αν αυτή συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

2.16 Εξετάστε για ποιές τιμές τού a οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απολύτως, συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

$$\begin{aligned}
 &(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1} \right)^n, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (\beta) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^a}{n}, \quad a \in \mathbb{R}, \\
 &(\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}, \quad a \neq 0, \\
 &(\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^{\log n}}{n^a}, \quad a > 0.
 \end{aligned}$$

2.17 Σωστό ή Λάθος;

(α) Αν $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, τότε η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(β) Αν $a_n > 0, b_n > 0$ και $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, τότε η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2.18 Έστω ότι $a, b > 0$. Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^a}{n^b}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^{\log n}}{n^b}.$$

- 2.19** Δίνεται φθίνουσα ακολουθία $\{a_n\}$. Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

- 2.20** Υποθέτουμε ότι $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ και ότι $\lim a_n = 0$. Τότε, από το κριτήριο για τις εναλλάσσουσες σειρές, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

συγκλίνει. Δείξτε επιπλέον ότι, αν s_n είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς και s το άθροισμά της, τότε

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- 2.21** Θεωρούμε την ακολουθία

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

- (α) Δείξτε ότι $t_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
 (β) Δείξτε ότι $t_n - t_{n+1} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
 (γ) Δείξτε ότι η ακολουθία $\{t_n\}$ συγκλίνει. (Το όριό της συμβολίζεται με γ και ονομάζεται σταθερά του *Euler*).

- 2.22** (συνέχεια της Άσκησης 2.21). Έστω h_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

και έστω s_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- (α) Δείξτε ότι $h_{2n} = s_{2n} - s_n$.
 (β) Δείξτε ότι $s_n - \log n \rightarrow \gamma$.
 (γ) Δείξτε ότι $h_{2n} \rightarrow \log 2$.
 (δ) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

- 2.23** (Κριτήριο συμπίκνωσης του Cauchy) Υποθέτουμε ότι $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

συγκλίνει.

2.24* Δίνονται δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ θετικών όρων για τις οποίες ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

2.25* (Abel) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μία σειρά θετικών όρων η οποία αποκλίνει. Έστω s_n τα μερικά της αθροίσματα. Δείξτε ότι

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ αποκλίνει.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ συγκλίνει.

2.26 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φθίνουσα και $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. Δείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$$

είτε και οι δύο συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν.

2.27 Έστω $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ μία φθίνουσα συνάρτηση. Θέτουμε

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{και} \quad I_n = \int_1^n f(x) dx.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $\{S_n - I_n\}$ είναι φθίνουσα και το όριό της ανήκει στο διάστημα $[0, f(1)]$.

2.28 Δείξτε ότι αν μία σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει απολύτως.

2.29 Αναδιατάσσουμε πεπερασμένους πλήθους όρους μιάς σειράς. Εξετάστε τι συμβαίνει με τη σύγκλιση ή την απόκλιση της αναδιάταξης.

2.30 Αποδείξτε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 2.3.5:

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μία σειρά που συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως. Αν $-\infty \leq s \leq t \leq +\infty$, τότε υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ με μερικά αθροίσματα $\{s'_n\}$ τέτοια ώστε

$$\liminf s'_n = s \quad \text{και} \quad \limsup s'_n = t.$$

2.31 Δείξτε ότι οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$ έχουν μοναδική τερματιζόμενη p -αδική παράσταση.

2.32 Βρείτε το $\sup$ και το $\inf$ του συνόλου

$$A = \{0.2, 0.22, 0.222, \dots\}.$$

2.33 Βρείτε το $\sup A$ και το $\inf A$ όπου A είναι το σύνολο των αριθμών του $(0, 1)$ οι οποίοι έχουν δεκαδική παράσταση που έχει μόνο τα ψηφία 0 και 1. Βρείτε επίσης τα $\max A$ και $\min A$ εφόσον υπάρχουν.

2.34 Μία μη τερματιζόμενη p -αδική παράσταση $0.k_1k_2\dots$ ονομάζεται περιοδική με περίοδο q αν υπάρχουν $q, k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $k_{n+q} = k_n$ για κάθε $n > k$. Έστω $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι η μη τερματιζόμενη p -αδική παράσταση του x είναι περιοδική αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.

2.35 Έστω $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι το x έχει τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση αν και μόνο αν υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοια ώστε ο αριθμός $2^m 5^n x$ να είναι ακέραιος.

2.36 Δείξτε ότι το σύνολο των αριθμών του $(0, 1)$ των οποίων η δεκαδική παράσταση (ή οι δεκαδικές παραστάσεις, αν έχει δύο τέτοιες) δεν περιέχει 7άρια και 3άρια είναι υπεραριθμήσιμο.

2.37 Βρείτε το εσωτερικό, το περίβλημα και το σύνορο του C (στην τοπολογία του $\mathbb{R}$).

2.38 (α) Δείξτε ότι το σύνολο C του Cantor δεν περιέχει κανένα διάστημα.
(β) Δείξτε ότι το C είναι πουθενά πυκνό. (Ένα σύνολο ονομάζεται πουθενά πυκνό αν $(\overline{C})^o = \emptyset$).

2.39 Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση του Cantor και την Άσκηση 1.26 για να δείξετε ότι $C \sim [0, 1]$.

2.40 Εξετάστε αν ο αριθμός $\frac{1}{4}$ ανήκει στο C . Είναι ακραίο σημείο του C ;

2.41 Δείξτε ότι για κάθε $x \in C \setminus \{0\}$ υπάρχει μία γνησίως μονότονη ακολουθία $\{x_n\} \subset C$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

2.42 Δείξτε ότι για το σύνολο C' των σημείων συσσώρευσης του C ισχύει $C' = C$ (δηλαδή το C είναι *τέλειο* σύνολο).

2.43 Μελετήστε τη συνέχεια της χαρακτηριστικής συνάρτησης χ_C του C .

2.44 Έστω C_1 το σύνολο των ακραίων σημείων του C . Δείξτε ότι η συνάρτηση του Cantor είναι γνησίως αύξουσα στο $C \setminus C_1$.

2.45 Δείξτε ότι για τη συνάρτηση f τού Cantor ισχύει

$$f(x) = \sup\{f(y) : y \in C, y \leq x\}, \quad x \in [0, 1].$$

2.46 Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάζουμε ένα σύνολο C_α τύπου Cantor ως εξής: Στο πρώτο βήμα αφαιρούμε από το $[0, 1]$ ένα “μεσαίο” ανοικτό διάστημα μήκους $(1 - \alpha) 3^{-1}$. Στο n βήμα αφαιρούμε 2^{n-1} ανοικτά διαστήματα μήκους $(1 - \alpha) 3^{-n}$. Δείξτε ότι το C_α είναι ένα τέλειο, υπεραριθμήσιμο σύνολο που δεν περιέχει κανένα διάστημα.

2.7 Σημειώσεις

Υπάρχει μία πληθώρα κριτηρίων σύγκλισης και απόκλισης σειρών. Πολλά από αυτά υπάρχουν στο [7, Κεφ. 7] και στο βιβλίο [2:1] Για τη σχετική έννοια τού *απειρογινόμενου*, παραπέμπουμε στα [4, 7]. Περισσότερα για αναδιατάξεις σειρών υπάρχουν στα [1, 7]. Το [7] περιέχει επίσης περισσότερες λεπτομέρειες για τις παραστάσεις αριθμών.

Το σύνολο τού Cantor είναι ένα από τα σημαντικότερα σύνολα στην Πραγματική Ανάλυση. Πρωτοεμφανίστηκε το 1875 σε μία εργασία τού H. Smith ενώ ο Cantor το μελέτησε λίγο αργότερα, το 1883· βλ. [2, σελ. 35]. Περισσότερα για το σύνολο τού Cantor και άλλα σύνολα τού ίδιου τύπου υπάρχουν στα βιβλία [2, 7] και στα άρθρα [2:2] και [2:3], Για τη συνάρτηση τού Cantor παραπέμπουμε στα άρθρα [2:4], [2:5] και [2:6].

Αναφορές

- [2:1] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Dover, 2013.
- [2:2] W. A. Coppel, An interesting Cantor set, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 456–460.
- [2:3] J. F. Randolph, Distances between points of the Cantor set, *Amer. Math. Monthly* **47** (1940), 549–551.
- [2:4] D. R. Chalice, A characterization of the Cantor function, *Amer. Math. Monthly* **98** (1991), 255–258.
- [2:5] E. Hille and J. D. Tamarkin, Remarks on a known example of a monotone continuous function, *Amer. Math. Monthly* **36** (1929), 255–264.
- [2:6] O. Dovgoshey, O. Martio and M. Vuorinen, The Cantor function, *Expo. Math.* **24** (2006), 1–37.

3.2 Μονότονες συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1. Δίνεται συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ και σύνολο $A \subset E$.

- Η f ονομάζεται **αύξουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) \leq f(y)$.
- Η f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) < f(y)$.
- Η f ονομάζεται **φθίνουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) \geq f(y)$.
- Η f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) > f(y)$.
- Η f ονομάζεται **μονότονη** στο A αν είναι είτε αύξουσα στο A είτε φθίνουσα στο A .
- Η f ονομάζεται **γνησίως μονότονη** στο A αν είναι είτε γνησίως αύξουσα στο A είτε γνησίως φθίνουσα στο A .

Θεώρημα 3.2.2. Αν η $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα συνάρτηση και αν $c \in (a, b)$, τότε τα πλευρικά όρια $f(c+)$ και $f(c-)$ υπάρχουν και ισχύει

$$f(c-) \leq f(c) \leq f(c+).$$

Απόδειξη. Ο αριθμός $f(c)$ είναι άνω φράγμα τού συνόλου $\{f(t) : t \in (a, c)\}$. Θέτουμε $s = \sup\{f(t) : t \in (a, c)\}$ και έχουμε $s \leq f(c)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $x_0 \in (a, c)$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < f(x_0) \leq s$. Οπότε αν $x_0 < x < c$, τότε λόγω μονοτονίας,

$$s - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq s.$$

Επομένως αν $x_0 < x < c$, τότε $|f(x) - s| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = s$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$f(c+) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x) = \inf_{t \in (c, b)} f(t) \geq f(c). \quad \square$$

Θεώρημα 3.2.3. Αν η $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση, τότε η f έχει το πολύ αριθμήσιμους πλήθους σημεία ασυνέχειας. Σε καθένα από αυτά η f έχει ασυνέχεια άλματος.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα· (αλλιώς εργαζόμαστε με την $-f$). Από το Θεώρημα 3.2.2, για κάθε $c \in (a, b)$, τα πλευρικά όρια $f(c-)$ και $f(c+)$ υπάρχουν και ισχύει $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$. Επομένως αν η f έχει ασυνέχεια στο c , τότε αυτή είναι είτε απαλείψιμη είτε ασυνέχεια άλματος. Η περίπτωση

τής απαλείψιμης ασυνέχειας αποκλείεται, διότι αν $f(c-) = f(c+)$ τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $f(c)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο c . Άρα η f έχει ασυνέχεια άλματος στο c .

Αν υποθέσουμε ότι η f έχει ασυνέχεια στα σημεία c, d με $c < d$, τότε τα διαστήματα $(f(c-), f(c+))$, $(f(d-), f(d+))$ είναι μη κενά και ξένα, άρα το καθένα περιέχει ένα ρητό. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια 1-1 συνάρτηση από το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $\mathbb{Q}$. Αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι το πολύ αριθμήσιμο. $\square$

Παρατήρηση 3.2.4. Για συναρτήσεις μονότονες σε κλειστό διάστημα (ή και σε γενικότερα σύνολα), θεωρήματα ανάλογα με τα 3.2.2, 3.2.3 αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Πόρισμα 3.2.5. Αν η συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ είναι μονότονη και επί, τότε η f είναι συνεχής.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αν η f έχει ασυνέχεια στο σημείο $x_0 \in [a, b]$, τότε έχει ασυνέχεια άλματος. Άρα το διάστημα $(f(x_0-), f(x_0+))$ δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f αν και είναι υποσύνολο του $[c, d]$. Ατοπο, διότι η f είναι επί. $\square$

Παράδειγμα 3.2.6. Η συνάρτηση τού Cantor είναι αύξουσα στο $[0, 1]$ και επί τού $[0, 1]$. Άρα είναι συνεχής!

3.3 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

Ορισμός 3.3.1. Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

είναι μία διαμέριση τού $[a, b]$, η κύμανση της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P είναι ο αριθμός

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Έστω P μία διαμέριση τού $[a, b]$ και $Q = P \cup \{x\}$, δηλαδή η Q είναι διαμέριση τού $[a, b]$ που περιέχει ένα σημείο περισσότερο από την P . Μπορούμε να

υποθέσουμε ότι $t_j < x < t_{j+1}$. Ισχύει

$$\begin{aligned} V(f, P) &= \sum_{k \neq j+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \\ &\leq \sum_{k \neq j+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(x) - f(t_j)| + |f(t_{j+1}) - f(x)| \\ &= V(f, Q). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $P \subset Q$, τότε έχουμε $V(f, P) \leq V(f, Q)$.

Η $P = \{a, b\}$ είναι η μικρότερη διαμέριση του $[a, b]$. Αν Q είναι μιά οποιαδήποτε άλλη, από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$|f(b) - f(a)| = V(f, P) \leq V(f, Q). \quad (3.2)$$

Ορισμός 3.3.2. Η ολική κύμανση της f στο $[a, b]$ είναι ο επεκτεταμένος θετικός αριθμός

$$V_a^b f = \sup\{V(f, P) : P \text{ διαμέριση τού } [a, b]\}.$$

Αν $V_a^b f < \infty$, η f ονομάζεται συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Το σύνολο των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$ συμβολίζεται με $BV[a, b]$.

Παράδειγμα 3.3.3. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αν P διαμέριση του $[a, b]$, τότε

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

Άρα $f \in BV[a, b]$ και $V_a^b f = f(b) - f(a)$. Παρομοίως, αν η f είναι φθίνουσα, τότε $V_a^b f = f(a) - f(b)$.

Πρόταση 3.3.4. Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, τότε η f είναι φραγμένη και

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b f.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in [a, b]$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{a, x, b\}$. Τότε

$$|f(x) - f(a)| \leq V(f, P) \leq V_a^b f.$$

Άρα $|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b f$. □

Παράδειγμα 3.3.5. Η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ δεν είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης διότι δεν είναι φραγμένη.

Πρόταση 3.3.6. Δίνονται πραγματικές συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$ και $c \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (α) $V_a^b f = 0$ αν και μόνο αν η f είναι σταθερή.
- (β) $V_a^b(cf) = |c|V_a^b f$.
- (γ) $V_a^b(f + g) \leq V_a^b f + V_a^b g$.
- (δ) $V_a^b(fg) \leq \|f\|_\infty V_a^b g + \|g\|_\infty V_a^b f$.
- (ε) $V_a^b|f| \leq V_a^b f$.
- (στ) Αν $c \in [a, b]$, τότε $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τα (γ) και (στ). Τα υπόλοιπα αφήνονται για άσκηση.

Απόδειξη τού (γ): Έστω P διαμέριση τού $[a, b]$. Ισχύει

$$\begin{aligned} V(f + g, P) &= \sum_{k=1}^n |(f + g)(t_k) - (f + g)(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1}) + g(t_k) - g(t_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\ &= V(f, P) + V(g, P) \leq V_a^b f + V_a^b g. \end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα το supremum για όλες τις διαμερίσεις τού $[a, b]$ και προκύπτει το (γ).

Απόδειξη τού (στ): Αν Q διαμέριση τού $[a, c]$ και R διαμέριση τού $[c, d]$, τότε η $P := Q \cup R$ είναι διαμέριση τού $[a, b]$ και ισχύει

$$V(f, Q) + V(f, R) = V(f, P) \leq V_a^b f.$$

Παίρνοντας τώρα το supremum για όλες τις διαμερίσεις Q και R , προκύπτει ότι $V_a^c f + V_c^b f \leq V_a^b f$.

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε διαμέριση P τού $[a, b]$. Θέτουμε

$$Q := (P \cup \{c\}) \cap [a, c] \quad \text{και} \quad R := (P \cup \{c\}) \cap [c, b].$$

Η Q είναι διαμέριση του $[a, c]$ και η R είναι διαμέριση του $[c, b]$. Άρα

$$V(f, P) \leq V(f, P \cup \{c\}) = V(f, Q) + V(f, R) \leq V_a^c f + V_c^b f$$

κι επομένως $V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f$. □

Παράδειγμα 3.3.7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ για $x \in [-2, 1]$. Η f είναι φθίνουσα στο $[-2, 0]$ και αύξουσα στο $[0, 1]$. Άρα

$$V_{-2}^1 f = V_{-2}^0 f + V_0^1 f = f(-2) - f(0) + f(1) - f(0) = 3$$

και επομένως $f \in \text{BV}[-2, 1]$.

Η παρακάτω πρόταση είναι πολύ συχνά χρήσιμη για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης χωρίς όμως να οδηγεί στον υπολογισμό της ολικής κύμανσης.

Πρόταση 3.3.8. Δίνεται συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Αν $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $f \in \text{BV}[a, b]$ και $V_a^b f \leq M(b - a)$.

Απόδειξη. Έστω $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ μία διαμέριση του $[a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, υπάρχει $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ τέτοιο ώστε

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} V(f, P) &= \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}) \\ &\leq M \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = M(b - a). \end{aligned}$$

Άρα $V_a^b f \leq M(b - a)$. □

Παράδειγμα 3.3.9. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1/\pi]. \end{cases}$$

Με χρήση του ορισμού της παραγώγου, εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 0$. Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1/\pi]$ και $\forall x \in (0, 1/\pi]$,

$$|f'(x)| = |2x \sin(1/x) - \cos(1/x)| \leq 2/\pi + 1.$$

Άρα η f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[0, 1/\pi]$ κι επομένως $f \in \text{BV}[0, 1/\pi]$.

Παράδειγμα 3.3.10. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1], \\ 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Η f είναι αύξουσα στο $[0, 2]$. Άρα $V_0^2 f = f(2) - f(0) = 1$.

Παράδειγμα 3.3.11. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ -x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Η f είναι αύξουσα στο $[0, 1]$ και φθίνουσα στο $[1, 2]$. Άρα

$$V_0^2 f = V_0^1 f + V_1^2 f = f(1) - f(0) + f(1) - f(2) = 4.$$

Παράδειγμα 3.3.12. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ x - 2, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Κοιτώντας τη γραφική παράσταση της f εικάζουμε ότι $V_0^2 f = 4$. Θα δείξουμε ότι η εικασία αυτή είναι αληθής. Έστω $0 < \varepsilon < 1/2$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P_\varepsilon = \{0, 1, 1 + \varepsilon, 2\}$ του $[0, 2]$. Ισχύει

$$V_0^2 f \geq V(f, P_\varepsilon) = |f(1) - f(0)| + |f(1 + \varepsilon) - f(1)| + |f(2) - f(1 + \varepsilon)| = 4 - 2\varepsilon.$$

Παίρνουμε όριο για $\varepsilon \rightarrow 0$ και προκύπτει $V_0^2 f \geq 4$.

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε μια τυχαία διαμέριση $P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ του $[0, 2]$. Υπάρχει μοναδικό $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ τέτοιο ώστε $t_m \leq 1 < t_{m+1}$. Παρατηρούμε ότι $0 \leq t_m \leq 1$ και $1 < t_{m+1} \leq 2$. Θέτουμε $P_1 = \{0, t_1, \dots, t_m\}$ και $P_2 = \{t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, 2\}$. Η P_1 είναι διαμέριση του $[0, t_m]$. Άρα

$$V(f, P_1) \leq V_0^{t_m} f = f(t_m) - 0 = t_m.$$

Η P_2 είναι διαμέριση του $[t_{m+1}, 2]$. Άρα

$$V(f, P_2) \leq V_{t_{m+1}}^2 f = f(2) - f(t_{m+1}) = 2 - t_{m+1}.$$

Τελικά λοιπόν

$$\begin{aligned} V(f, P) &= V(f, P_1) + |f(t_{m+1}) - f(t_m)| + V(f, P_2) \\ &\leq t_m + t_m + 2 - t_{m+1} + 2 - t_{m+1} = 2t_m + 4 - 2t_{m+1} \\ &\leq 2 + 4 - 2 = 4. \end{aligned}$$

Επειδή η P είναι τυχαία διαμέριση του $[0, 2]$, ισχύει $V_0^2 f \leq 4$. Άρα $V_0^2 f = 4$.

Ορισμός 3.3.13. Αν $f \in \text{BV}[a, b]$, η **συνάρτηση ολικής κύμανσης** της f είναι η

$$v_f(x) = V_a^x f, \quad x \in [a, b],$$

με τη σύμβαση $V_a^a f = 0$.

Παράδειγμα 3.3.14. Θα βρούμε τη συνάρτηση ολικής κύμανσης της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Έστω $x \in [-\pi, 0]$. Τότε

$$V_{-\pi}^x f = f(x) - f(-\pi) = \cos x + 1.$$

Για $x \in [0, \pi]$,

$$V_{-\pi}^x f = V_{-\pi}^0 f + V_0^x f = f(0) - f(-\pi) + f(0) - f(x) = 3 - \cos x.$$

Άρα η συνάρτηση ολικής κύμανσης είναι η

$$v_f(x) = \begin{cases} \cos x + 1, & x \in [-\pi, 0], \\ 3 - \cos x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Θεώρημα 3.3.15. Έστω $f \in \text{BV}[a, b]$ με συνάρτηση ολικής κύμανσης v_f . Οι συναρτήσεις v_f και $v_f - f$ είναι αύξουσες.

Απόδειξη. Έστω $x < y$ στο $[a, b]$. Από την Πρόταση 3.3.6 (στ),

$$v_f(y) - v_f(x) = V_a^y f - V_a^x f = V_x^y f \geq |f(y) - f(x)| \geq 0.$$

Άρα η v_f είναι αύξουσα. Η παραπάνω ανισότητα δίνει επίσης

$$v_f(y) - v_f(x) \geq f(y) - f(x),$$

δηλαδή $v_f(y) - f(y) \geq v_f(x) - f(x)$. Άρα και η $v_f - f$ είναι αύξουσα. $\square$

Πόρισμα 3.3.16. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μιá συνάρτηση. Τότε $f \in \text{BV}[a, b]$ αν και μόνο αν η f είναι διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.

Απόδειξη. Αν $f \in \text{BV}[a, b]$, τότε $f = v_f - (v_f - f)$ και λόγω του Θεωρήματος 3.3.15 οι συναρτήσεις v_f και $v_f - f$ είναι αύξουσες.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 αύξουσες συναρτήσεις. Τότε $f_1, f_2 \in \text{BV}[a, b]$ (βλ. Παράδειγμα 3.3.3). Άρα $f \in \text{BV}[a, b]$ λόγω της Πρότασης 3.3.6 (γ). $\square$

Από τα Θεωρήματα 3.2.2, 3.2.3 (βλ. και Παρατήρηση 3.2.4) προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.17. Κάθε συνάρτηση f φραγμένης κύμανσης έχει το πολύ αριθμήσιμους πλήθους ασυνέχειες. Κάθε ασυνέχεια της f είναι είτε απαλείψιμη είτε ασυνέχεια άλματος.

Παράδειγμα 3.3.18. Στο Παράδειγμα 3.3.5 είδαμε μία συνάρτηση στο $[0, 1]$ η οποία δεν είναι φραγμένης κύμανσης επειδή δεν είναι φραγμένη. Θα δούμε τώρα μία φραγμένη συνάρτηση που δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: είναι συνεχής, ικανοποιεί τις ισότητες $f(0) = 0$, $f(1/n) = (-1)^n/n$ για $n \in \mathbb{N}$, και σε καθένα από τα διαστήματα $[1/(n+1), 1/n]$ η γραφική της παράσταση είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Θεωρούμε την ακολουθία των διαμερίσεων

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} V(f, P_n) &= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \left| \frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \right| \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Παίρνουμε όρια για $n \rightarrow \infty$ και συμπεραίνουμε ότι $V_0^1 f = \infty$, άρα $f \notin \text{BV}[0, 1]$.

Παράδειγμα 3.3.19. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Για $n \in \mathbb{N}$, έστω P μία οποιαδήποτε διαμέριση του $[0, 1]$ που περιέχει τα σημεία $t_k = 2/[(2k+1)\pi]$ για $k = 0, \dots, n$. Ισχύει

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| = t_k + t_{k-1} \geq 2t_k = \frac{4}{(2k+1)\pi}.$$

Συνεπώς

$$V(f, P) \geq \sum_{k=1}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} \rightarrow \infty, \quad \text{όταν } n \rightarrow \infty.$$

Άρα $f \notin \text{BV}[0, 1]$.

Οι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης σχετίζονται άμεσα με την έννοια του μήκους καμπύλης. Μία **επίπεδη καμπύλη**, δηλαδή μία συνεχής συνάρτηση $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ορίζει δύο συναρτήσεις $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$F(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Οι x, y είναι οι **συνιστώσες συναρτήσεις** της F . Θα δούμε ότι μια επίπεδη καμπύλη έχει πεπερασμένο μήκος αν και μόνο αν οι συναρτήσεις x, y έχουν φραγμένη κύμανση.

Ορισμός 3.3.20. Δίνεται μία επίπεδη καμπύλη $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με συνιστώσες συναρτήσεις x, y . Αν $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ είναι μία διαμέριση του $[a, b]$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} L(F, P) &= \sum_{k=1}^n \|F(t_k) - F(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}. \end{aligned}$$

Το **μήκος της καμπύλης** είναι ο επεκτεταμένος αριθμός

$$L(F) := \sup\{L(F, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\}.$$

Η καμπύλη ονομάζεται **ευθυγραμμίσιμη** αν έχει πεπερασμένο μήκος.

Θεώρημα 3.3.21. Δίνεται μία επίπεδη καμπύλη $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Η F είναι ευθυγραμμίσιμη αν και μόνο αν οι συνιστώσες συναρτήσεις x και y είναι φραγμένης κύμανσης.

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ μία διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ισχύει

$$\begin{aligned} |x(t_k) - x(t_{k-1})| &\leq \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\ &\leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})| \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} |y(t_k) - y(t_{k-1})| &\leq \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\ &\leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})| \end{aligned}$$

Άρα

$$V(x, P) \leq L(F, P) \leq V(x, P) + V(y, P) \quad (3.3)$$

$$V(y, P) \leq L(F, P) \leq V(x, P) + V(y, P). \quad (3.4)$$

Από τις (3.3) και (3.4) προκύπτει ότι $x, y \in \text{BV}[a, b]$ αν και μόνο αν η F είναι ευθυγραμμίσιμη. $\square$

- 3.24** Δείξτε ότι η συνάρτηση x^α είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, \infty)$ αν και μόνο αν $0 \leq \alpha \leq 1$.
Υπόδειξη: Αν $0 < \alpha \leq 1$, η x^α είναι Lipschitz τάξης α . Ειδικά, αν για παράδειγμα $\alpha = 2$, τότε χρησιμοποιήστε τη σύγκλιση $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.
- 3.25*** Δίνεται ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, όπου πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική ομοιόμορφα συνεχής επέκταση της f στο $\mathbb{R}$.
- 3.26** Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας επεκτείνεται και σε μετρικούς χώρους. Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) . Μία συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε
- $$(x_1, x_2 \in X \text{ και } d(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$
- Αν η $g: X \rightarrow Y$ είναι συνεχής και ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, δείξτε ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- 3.27** Δίνεται η συνάρτηση $f: l^2 \rightarrow l^1$, με $f(\{x_n\}) = \{x_n/n\}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Η άσκηση προϋποθέτει γνώση των χώρων l^1 και l^2 . Βλ. [2, 7])

Μονότονες συναρτήσεις

- 3.28** Δίνονται συναρτήσεις f και g που είναι αύξουσες στο E .
- Δείξτε ότι η $f + g$ είναι αύξουσα.
 - Αν μιά από τις f και g είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα.
 - Αν $f, g \geq 0$, τότε η fg είναι αύξουσα.
 - Αν $f, g \leq 0$, τότε η fg είναι φθίνουσα.
 - Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in E$ και η f έχει σταθερό πρόσημο στο E , τότε η $1/f$ είναι φθίνουσα στο E .
- 3.29** Βρείτε αύξουσες συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε η fg να είναι φθίνουσα.
- 3.30** Δίνονται μονότονη συνάρτηση f στο E και μονότονη συνάρτηση g στο A με $f(E) \subset A$.
- Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι αύξουσα.
 - Αν οι f, g έχουν αντίθετα είδη μονοτονίας, δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι φθίνουσα.

- 3.31** Δείξτε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , τότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.
- 3.32** Σωστό ή Λάθος;
Αν μιά συνάρτηση είναι αμφιμονότιμη, τότε είναι γνησίως μονότονη.
- 3.33** Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και αμφιμονότιμη σε ένα διάστημα I , τότε είναι γνησίως μονότονη στο I .
- 3.34** Δείξτε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα I , τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(I)$.
- 3.35** Δίνονται συναρτήσεις f αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g συνεχής στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f = g$.
- 3.36** Σωστό ή Λάθος;
Αν η f είναι αύξουσα στο $[a, c)$ και αύξουσα στο $[c, b]$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.
- 3.37** Δείξτε ότι κάθε φραγμένη, συνεχής, και μονότονη συνάρτηση σε ένα ανοικτό διαστημα I είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I .

Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

- 3.38** Δείξτε ότι αν $f \in \text{BV}[a, b]$ και υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq m$, $\forall x \in [a, b]$, τότε $1/f \in \text{BV}[a, b]$.
- 3.39** Αποδείξτε τα (α), (β), (δ), (ε) της Πρότασης 3.3.6.
- 3.40** Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι φραγμένης κύμανσης και βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση ολικής κύμανσης.
(α) $f_1(x) = x^2$, $x \in [-2, 5]$.
(β) $f_2(x) = \cos x$, $x \in [-\pi, 2\pi]$.
(γ) $f_3(x) = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$.
- 3.41** Δείξτε ότι αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$, τότε $f \in \text{BV}[a, b]$ και
- $$V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt.$$
- 3.42** Δείξτε ότι $V_a^b(\chi_{\mathbb{Q}}) = +\infty$.
- 3.43** Δείξτε ότι $f \in \text{BV}[a, b]$ αν και μόνο αν υπάρχει αύξουσα συνάρτηση F στο $[a, b]$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq F(x) - F(y)$ για κάθε $x, y \in [a, b]$ με $x > y$.

3.44 Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι φραγμένης κύμανσης και βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση ολικής κύμανσης.

(α) $f_1(x) = |\log x|$, $x \in [1/e, 2e]$.

(β) $f_2(x) = e^x - x$, $x \in [0, 4]$.

3.45 Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ -3, & x = 1, \\ x - 2, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Βρείτε τον αριθμό $V_0^2 f$.

3.46 Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-\beta}), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι:

(α) Η f είναι φραγμένη αν και μόνο αν $\alpha \geq 0$.

(β) Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν $\alpha > 0$.

(γ) Η $f'(0)$ υπάρχει αν και μόνο αν $\alpha > 1$.

(δ) Η f' είναι φραγμένη αν και μόνο αν $\alpha \geq 1 + \beta$.

(ε) Αν $\alpha > 0$, τότε $f \in BV[0, 1]$ για $0 < \beta < \alpha$ και $f \notin BV[0, 1]$ για $\beta \geq \alpha$.

3.47 Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi), \\ \sin x, & x \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

δείξτε ότι $f \in BV[0, 2\pi]$.

3.48 Δείξτε ότι αν $f, g \in BV[a, b]$ και $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, τότε $h \in BV[a, b]$.

3.49 Δίνεται συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν $V_a^b f = f(b) - f(a)$.

3.50 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν σημεία $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ τέτοια ώστε η f είναι παραγωγίσιμη και μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{j-1}, t_j]$. Δείξτε ότι $f \in BV[a, b]$ και

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

3.51 Σωστό ή Λάθος;

- (α) Αν $|f| \leq |g|$ στο $[a, b]$, τότε $V_a^b f \leq V_a^b g$.
 (β) Αν η $g \in \text{BV}[0, 1]$ είναι αμφιμονότιμη, τότε είναι γνησίως μονότονη.
 (γ) Υπάρχει συνάρτηση που είναι αύξουσα και μη φραγμένη στο $[0, 1]$.

3.52 Δείξτε ότι η

$$\|f\|_{\text{BV}} := |f(a)| + V_a^b f$$

είναι νόρμα στο χώρο $\text{BV}[a, b]$.

3.53 Σωστό ή Λάθος;

- (α) Αν για μιά φραγμένη συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $V_{a+\varepsilon}^b f \leq M$, $\forall \varepsilon > 0$, τότε $V_a^b f \leq M$.
 (β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f \in \text{BV}[a + \varepsilon, b]$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $f \in \text{BV}[a, b]$.

3.54 Βρείτε μιά μη θετική συνάρτηση $f \in \text{BV}[0, 1]$ με $V_0^1 f = V_0^1 |f|$ και μιά συνάρτηση $g \in \text{BV}[0, 1]$ με $V_0^1 |g| < V_0^1 g$.

3.55 Δίνονται αριθμός $p \in [1, \infty)$ και συνάρτηση $f \in \text{BV}[a, b]$. Δείξτε ότι $|f|^p \in \text{BV}[a, b]$.

3.56 Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $|f| \in \text{BV}[a, b]$, τότε $f \in \text{BV}[a, b]$.

3.57 Μιά συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **τμηματικά μονότονη** αν υπάρχει διαμέριση $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε η f είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$. Δείξτε κάθε τμηματικά μονότονη συνάρτηση, είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Βρείτε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης που δεν είναι τμηματικά μονότονη.

3.58 Έστω ότι $a < c < b$. Δίνεται συνάρτηση f φθίνουσα στο $[a, c)$ και φθίνουσα στο $[c, b]$. Δείξτε ότι

$$V_a^b f = f(a) - f(c-) + |f(c) - f(c-)| + f(c) - f(b).$$

Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις

3.59 Σωστό ή Λάθος;

- (α) Κάθε συνάρτηση στο $[a, b]$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο φθινουσών συναρτήσεων στο $[a, b]$.
 (β) Κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο φθινουσών συναρτήσεων στο $[a, b]$.