

# **Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση**



Δημήτριος Μπετσάκος  
Τμήμα Μαθηματικών  
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

 **Αφοί Κυριακίδη**  
**ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α.Ε.**

ISBN 978-960-602-292-0

©2020

**Αφοί Κυριακίδη Εκδόσεις Α.Ε.**

Επισκόπου Κίτρους Νικολάου 4,

Τ.Κ. 546 35, Θεσσαλονίκη,

Τηλ. 2310.208.570, Fax 2315.550.889

email: [info@afoikyriakidi.gr](mailto:info@afoikyriakidi.gr)

web: [www.afoikyriakidis.gr](http://www.afoikyriakidis.gr)

fb: [www.fb.com/afoikyriakidi](http://www.fb.com/afoikyriakidi)

*Η πνευματική ιδιοκτησία αποκτάται χωρίς καμμία διατύπωση και χωρίς την ανάγκη ρήτηρας απαγορευτικής των προσβολών της. Πάντως, κατά το Ν.2121/1993 και τη διεθνή σύμβαση της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το Ν.100/1975) απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου, με οποιονδήποτε τρόπο (ηλεκτρονικό, μηχανικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο), τμηματικά ή περιληπτικά, στο πρωτότυπο ή σε μετάφραση ή άλλη διασκευή, χωρίς γραπτή άδεια εκδότη.*

*Στα παιδιά μου*



# Περιεχόμενα

Πρόλογος	xī
<b>1 Οι μιγαδικοί αριθμοί</b>	<b>1</b>
1.1 Αλγεβρικές ιδιότητες . . . . .	1
1.2 Το μιγαδικό επίπεδο . . . . .	4
1.3 Η πολική μορφή . . . . .	8
1.4 Ασκήσεις . . . . .	12
<b>2 Τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου</b>	<b>17</b>
2.1 Βασικές έννοιες . . . . .	17
2.2 Ακολουθίες μιγαδικών αριθμών . . . . .	19
2.3 Συμπαγή σύνολα . . . . .	22
2.4 Συνεκτικά σύνολα. Τόποι . . . . .	24
2.5 Μιγαδικές συναρτήσεις . . . . .	27
2.6 Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων . . . . .	30
2.7 Το $\mathbb{C}$ και η σφαίρα του Riemann . . . . .	32
2.8 Ασκήσεις . . . . .	34
<b>3 Ολόμορφες συναρτήσεις</b>	<b>39</b>
3.1 Μιγαδική παράγωγος . . . . .	39
3.2 Οι εξισώσεις Cauchy - Riemann . . . . .	41
3.3 Αρμονικές συναρτήσεις . . . . .	48
3.4 Ασκήσεις . . . . .	49
<b>4 Παραδείγματα ολόμορφων συναρτήσεων</b>	<b>53</b>
4.1 Η εκθετική συνάρτηση . . . . .	53
4.2 Ο μιγαδικός λογάριθμος . . . . .	55
4.3 Μιγαδικές δυνάμεις . . . . .	58
4.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . . .	59
4.5 Υπερβολικές συναρτήσεις . . . . .	61
4.6 Ομογραφικοί μετασχηματισμοί . . . . .	63
4.7 Ασκήσεις . . . . .	67

<b>5</b>	<b>Μιγαδική ολοκλήρωση</b>	<b>71</b>
5.1	Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο . . . . .	71
5.2	Ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων σε πραγματικά διαστήματα	76
5.3	Μιγαδικά ολοκληρώματα . . . . .	77
5.4	Ασκήσεις . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Η Θεωρία Cauchy</b>	<b>85</b>
6.1	Αντιπαράγωγοι . . . . .	85
6.2	Απλά συνεκτικοί τόποι . . . . .	90
6.3	Επικαμπύλια ολοκληρώματα. Θεώρημα Green . . . . .	91
6.4	Θεωρήματα Cauchy . . . . .	92
6.5	Ο Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy . . . . .	97
6.6	Μερικές συνέπειες του Θεωρήματος Cauchy . . . . .	102
6.7	Ασκήσεις . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Σειρές μιγαδικών αριθμών και συναρτήσεων</b>	<b>113</b>
7.1	Σειρές μιγαδικών αριθμών . . . . .	113
7.2	Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων . . . . .	117
7.3	Ακολουθίες ολόμορφων συναρτήσεων . . . . .	120
7.4	Δυναμοσειρές . . . . .	122
7.5	Ασκήσεις . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Θεώρημα Taylor και συνέπειές του</b>	<b>129</b>
8.1	Θεώρημα Taylor . . . . .	129
8.2	Η Αρχή Ταυτισμού . . . . .	132
8.3	Η Αρχή Μεγίστου . . . . .	135
8.4	Ασκήσεις . . . . .	140
<b>9</b>	<b>Σειρές Laurent. Ανώμαλα σημεία</b>	<b>147</b>
9.1	Σειρές Laurent . . . . .	147
9.2	Απομονωμένα ανώμαλα σημεία . . . . .	154
9.3	Απαλείψιμα ανώμαλα σημεία . . . . .	155
9.4	Πόλοι . . . . .	157
9.5	Ουσιώδη ανώμαλα σημεία . . . . .	161
9.6	Το $\infty$ ως απομονωμένο ανώμαλο σημείο . . . . .	163
9.7	Κανόνες L'Hôpital . . . . .	164
9.8	Ασκήσεις . . . . .	166
<b>10</b>	<b>Ολοκληρωτικά υπόλοιπα</b>	<b>169</b>
10.1	Το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων . . . . .	169
10.2	Η Αρχή του Ορίσματος . . . . .	175
10.3	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων . . . . .	181
10.4	Ασκήσεις . . . . .	185

---

Ασκήσεις πολλαπλής επιλογής	191
Ασκήσεις Σωστό ή Λάθος	215
Δύσκολες ασκήσεις	223
Οι θεμελιωτές της Μιγαδικής Ανάλυσης	229
Βιβλιογραφία	233
Κατάλογος συμβόλων	235
Ευρετήριο όρων	237



# Πρόλογος

Η Μιγαδική Ανάλυση είναι η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Οι A.L. Cauchy, B. Riemann, K. Weierstrass και άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί τού δεκάτου ενάτου αιώνα ανέπτυξαν τη θεωρία αυτή σε ένα σύστημα αξεπέραστης ομορφιάς. Σήμερα η έρευνα στη Μιγαδική Ανάλυση συνεχίζεται εντατικά και επικεντρώνεται στην προσπάθεια για τη λύση πολλών προβλημάτων που παραμένουν ανοικτά και στη σύνδεση της Μιγαδικής Ανάλυσης με άλλους κλάδους των Μαθηματικών.

Το βιβλίο αυτό έχει εισαγωγικό χαρακτήρα και έχει σκοπό να οδηγήσει σε μια πρώτη αλλά ουσιαστική γνωριμία με τη Μιγαδική Ανάλυση. Προϋποθέτει γνώση μόνο του Λογισμού και λίγων στοιχείων της Τοπολογίας του επιπέδου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τούς συναδέλφους Κ. Αδάμ, Β. Ευδωρίδου, Ι. Εφραιμίδη, Κ. Ζάφβαλη, Ν. Καραμανλή, Χ. Καραφυλλιά, Μ. Κούρου, Α. Κουρούπη, Σ. Πουλιάση, για τις παρατηρήσεις, διορθώσεις και προτάσεις τους.

Στην ανάπτυξη τού 2023, έγιναν διορθώσεις και βελτιώσεις στην παρουσίαση τής ύλης.



# Κεφάλαιο 1

## Οι μιγαδικοί αριθμοί

### 1.1 Αλγεβρικές ιδιότητες

**Ορισμός 1.1.1.** Κάθε ζεύγος  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ονομάζεται *μιγαδικός αριθμός*. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με  $\mathbb{C}$ .

Στο  $\mathbb{C}$  ορίζουμε δύο πράξεις:

**Πρόσθεση:**  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .

**Πολλαπλασιασμός:**  $(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ .

*Συμβολισμοί.* Οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής  $(x, 0)$  θα συμβολίζονται με  $x$ . Ο μιγαδικός αριθμός  $(0, 1)$  θα συμβολίζεται με  $i$ . Έτσι, με βάση τους ορισμούς της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, βρίσκουμε ότι

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)y = x + iy.$$

Από εδώ και πέρα, για το μιγαδικό αριθμό  $(x, y)$ , θα χρησιμοποιούμε κυρίως το συμβολισμό  $x + iy$ . Οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής  $iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , ονομάζονται *φανταστικοί*. Το σύνολο  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι σώμα ισόμορφο του  $\mathbb{R}$ . Έτσι ταυτοποιούμε αυτό το σύνολο με το  $\mathbb{R}$ . Με τη σύμβαση αυτή το  $\mathbb{R}$  είναι υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ .

**Ορισμός 1.1.2.** Έστω  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Ο *αντίθετος* του  $z$  είναι ο μιγαδικός αριθμός  $-z := -x - iy$ .

**Ορισμός 1.1.3.** Έστω  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Ο *αντίστροφος* του  $z$  είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι για  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ισχύει

$$\frac{1}{z}z = z\frac{1}{z} = 1.$$

Η παρακάτω πρόταση προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς και συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

**Πρόταση 1.1.4.** Για  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , ισχύουν τα παρακάτω.

1.  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2.  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
3.  $z + 0 = z = 0 + z$
4.  $z + (-z) = 0$
5.  $z_1 z_2 = z_2 z_1$
6.  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
7.  $z1 = z = 1z$
8.  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

Στο  $\mathbb{C}$  ορίζουμε δύο ακόμη πράξεις:

**Αφαίρεση:**  $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

**Διαίρεση:**  $\frac{z_1}{z_2} := z_1 \frac{1}{z_2}, \quad z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

**Παράδειγμα 1.1.5.**

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

**Ορισμός 1.1.6.** Αν  $z \in \mathbb{C}$  και  $n \in \mathbb{N}$ , ορίζουμε

$$z^n := \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ όροι}}.$$

Αν  $z \neq 0$ , ορίζουμε  $z^0 = 1$  και  $z^{-n} = \frac{1}{z^n}, n \in \mathbb{N}.$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:  $z^n z^m = z^{n+m}, (z^m)^n = z^{mn}$  και  $(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m.$

**Παράδειγμα 1.1.7** (Δυνάμεις του  $i$ ).

$$i^0 = 1, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1.$$

Άρα

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Παρατήρηση 1.1.8.** Ο αριθμός  $i$  έχει την ιδιότητα  $i^2 = -1$ , δηλαδή είναι ρίζα της εξίσωσης  $z^2 + 1 = 0$ .

**Ορισμός 1.1.9.** Αν  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , ο πραγματικός αριθμός  $x$  ονομάζεται *πραγματικό μέρος* του  $z$ . Ο πραγματικός αριθμός  $y$  ονομάζεται *φανταστικό μέρος* του  $z$ .

Συμβολισμός:  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ .

**Ορισμός 1.1.10.** Αν  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , ο συζυγής του  $z$  είναι ο  $\bar{z} := x - iy$ .

Ισχύουν οι ισότητες  $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$ .

**Πρόταση 1.1.11.** Αν  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , τότε

1.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2.  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
4.  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$
5.  $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad n = 1, 2, \dots$
6.  $\overline{\bar{z}} = z$
7.  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$
8.  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} 3. \quad \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Όμως  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ .

5. Για  $n = 1$ :  $\bar{z} = \bar{z}$ , ισχύει. Για  $n = 2$ :  $\overline{z^2} = \overline{z \cdot z} \stackrel{3.}{=} \bar{z} \bar{z} = (\bar{z})^2$ , ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο  $n$ : δηλαδή  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ . Τότε

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z} = \overline{z^n} \bar{z} = (\bar{z})^n \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}.$$

$$6. \quad \overline{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

$$8. \quad z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z. \quad \square$$

**Παράδειγμα 1.1.12.** Λύστε την εξίσωση  $(3 - i)\bar{z} + 1 - i = 2 + i$ .

Λύση.

$$(3 - i)\bar{z} + 1 - i = 2 + i \Leftrightarrow (3 - i)\bar{z} = 1 + 2i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Άρα  $z = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ .

**Παράδειγμα 1.1.13.** Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 2 - 4i \\ -i\bar{z}_1 + z_2 = -2. \end{cases}$$

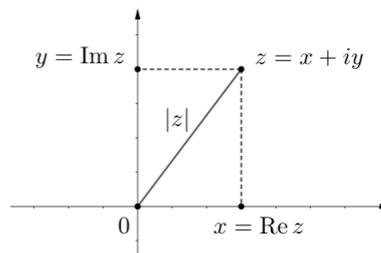
Λύση.

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 2 - 4i \\ -i\bar{z}_1 + z_2 = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_1 + z_2 = 2 + 4i \\ -i\bar{z}_1 + z_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_1 + z_2 = 2 + 4i \\ (1 + i)\bar{z}_1 = 4 + 4i \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_1 + z_2 = 2 + 4i \\ z_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + z_2 = 2 + 4i \\ z_1 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -2 + 4i \\ z_1 = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.2 Το μιγαδικό επίπεδο

**Ορισμός 1.2.1.** Η απόλυτη τιμή ή μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$  είναι ο πραγματικός αριθμός

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$



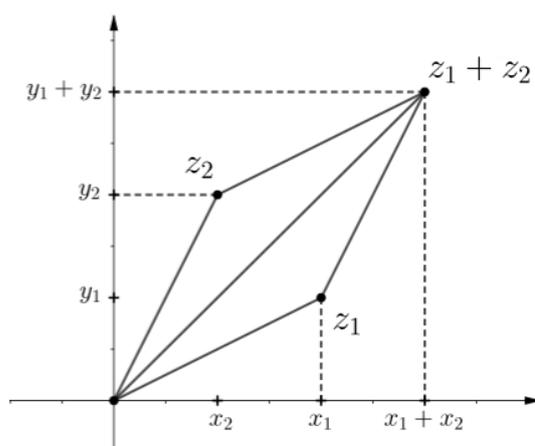
**Παρατήρηση 1.2.2.**

1. Αν  $z \in \mathbb{C}$ , το  $|z|$  είναι η απόσταση του  $z$  από το 0.

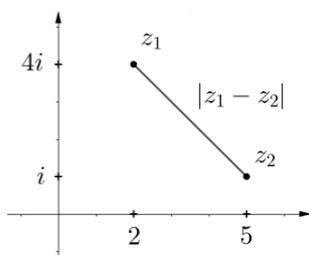
2.  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .
3.  $|-z| = |z|$ .
4.  $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  (απόσταση των  $z_1, z_2$ ).

### Γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης

Η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών γίνεται με τον κανόνα τού παραλληλογράμμου.

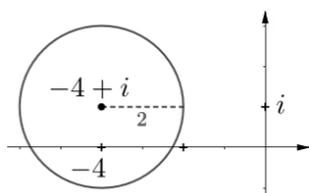


**Παράδειγμα 1.2.3.** Βρείτε την απόσταση των  $z_1 = 2 + 4i$ ,  $z_2 = 5 + i$ .



$$\begin{aligned}
 |z_1 - z_2| &= |2 + 4i - 5 - i| \\
 &= |-3 + 3i| \\
 &= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}.
 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.2.4. (Κύκλοι)** Βρείτε τα σημεία  $z$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $|z + 4 - i| = 2$ .



Αναζητούμε τα σημεία  $z$  με  $|z - (-4 + i)| = 2$ , δηλαδή αυτά που απέχουν απόσταση 2 από το  $-4 + i$ : κύκλος κέντρου  $-4 + i$  και ακτίνας 2.

Συμβολισμός:  $C(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$   
κύκλος κέντρου  $z_0$  και ακτίνας  $r$ .

**Παράδειγμα 1.2.5. (Δίσκοι)** Βρείτε τα σημεία με  $|z + 4 - i| \leq 2$ .

Είναι τα σημεία του κλειστού δίσκου κέντρου  $-4 + i$  και ακτίνας 2.

Συμβολισμοί:  $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  ανοικτός δίσκος κέντρου  $z_0$  και ακτίνας  $r$ .

$\overline{D(z_0, r)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$  κλειστός δίσκος κέντρου  $z_0$  και ακτίνας  $r$ .

$\mathbb{D} := D(0, 1)$

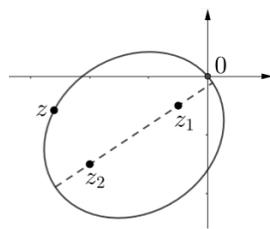
Ισχύει ότι  $\overline{D(z_0, r)} = D(z_0, r) \cup C(z_0, r)$ .

**Παράδειγμα 1.2.6. (Ελλείψεις)** Βρείτε τα σημεία  $z \in \mathbb{C}$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $|z + 1 + i| + |z + 4 + 3i| = 5 + \sqrt{2}$ .

Αναζητούμε λοιπόν τα σημεία με

$$|z - (-1 - i)| + |z - (-4 - 3i)| = 5 + \sqrt{2},$$

δηλαδή τα  $z \in \mathbb{C}$  που το άθροισμα των αποστάσεών τους από τα  $-1 - i$  και  $-4 - 3i$  είναι σταθερό και ίσο με  $5 + \sqrt{2}$ . Αυτά σχηματίζουν μια έλλειψη με εστίες τα  $z_1 = -1 - i$  και  $z_2 = -4 - 3i$ .



Η έλλειψη περνά από το 0 διότι

$$\begin{aligned} |0 - z_1| + |0 - z_2| &= |z_1| + |z_2| \\ &= \sqrt{1+1} + \sqrt{16+9} \\ &= 5 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Πρόταση 1.2.7.** Αν  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , τότε

1.  $|z|^2 = z \bar{z}$ ,
2.  $|z| = |\bar{z}|$ ,
3.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,
4.  $|z^n| = |z|^n$ ,
5.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $z_2 \neq 0$ .

Απόδειξη.

$$1. z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

$$3. |z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

$$5. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|} |z_2| \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|} \left| z_2 \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|} |z_1|.$$

□

**Παράδειγμα 1.2.8.**  $|i^n| = |i|^n = 1^n = 1$ .

$$\left| \frac{1+2i}{1-i} \right| = \frac{|1+2i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

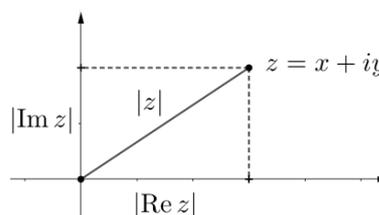
**Πρόταση 1.2.9.** Για κάθε  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ισχύει ότι

1.  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$
2.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (τριγωνική ανισότητα),
3.  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$

Απόδειξη.

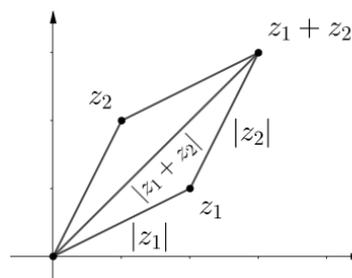
1. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \\ |y| &\leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|. \end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$



3. Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα:

$$\begin{aligned} |z_1| &= |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow \\ |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} |z_2| &= |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_1| \Rightarrow \\ |z_2| - |z_1| &\leq |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Άρα  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$

□

**Παράδειγμα 1.2.10.** Βρείτε ένα άνω φράγμα για το  $|z^7 - 1|$  για  $z \in \overline{D(0, 1)}$ .

Λύση.  $|z^7 - 1| \leq |z|^7 + 1 \leq 1 + 1 = 2$ .

**Παράδειγμα 1.2.11.** Βρείτε ένα άνω φράγμα για το  $|z - 2|$  στο δίσκο  $\overline{D(i, 1)}$ .

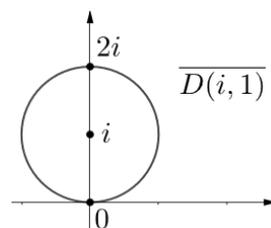
Λύση. Στο δίσκο  $\overline{D(i, 1)}$  ισχύει  $|z - i| \leq 1$ . Άρα

$$|z - 2| = |z - i + i - 2| \leq |z - i| + |i - 2| \leq 1 + \sqrt{5}.$$

**Παράδειγμα 1.2.12.** Βρείτε ένα κάτω φράγμα για το  $|z - 2|$  στο δίσκο  $\overline{D(i, 1)}$ .

Λύση.

$$\begin{aligned} |z - 2| &= |z - i + i - 2| \geq \left| |z - i| - |-2 + i| \right| \\ &= \left| |z - i| - \sqrt{5} \right| \geq \sqrt{5} - |z - i| \\ &\geq \sqrt{5} - 1. \end{aligned}$$



### 1.3 Η πολική μορφή

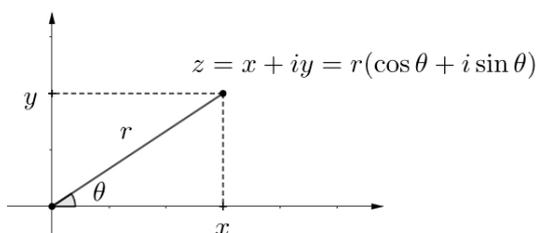
**Ορισμός 1.3.1.** Έστω  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Θέτουμε  $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  και θεωρούμε μια γωνία  $\theta \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

Το  $r$  είναι το μέτρο του  $z$  και το  $\theta$  είναι ένα όρισμα του  $z$ . Ισχύει

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Αυτή είναι η πολική μορφή του  $z$ .



**Παρατήρηση 1.3.2.** Αν  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ο  $z$  έχει πολλά όρισματα. Για παράδειγμα,

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi.$$

Έτσι το 0 και το  $2\pi$  είναι ορίσματα του 1. Γενικά αν  $\theta$  είναι ένα όρισμα του  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , τότε όλοι οι αριθμοί  $\theta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , είναι ορίσματα του  $z$ .

**Συμβολισμός:** Αν  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , το σύνολο των ορισμάτων του  $z$  συμβολίζεται με  $\arg z$ .

**Ορισμός 1.3.3.** Το πρωτεύον όρισμα του  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  είναι ο μοναδικός αριθμός  $\text{Arg } z$  με τις ιδιότητες:

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi, \quad \cos(\text{Arg } z) = \frac{x}{|z|}, \quad \sin(\text{Arg } z) = \frac{y}{|z|}.$$

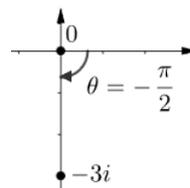
Προφανώς ισχύει  $\arg z = \{\text{Arg } z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Παράδειγμα 1.3.4.** Αν  $z_1 = -3i$ , τότε  $r = |z_1| = |-3i| = 3$ ,  $\text{Arg } z_1 = -\frac{\pi}{2}$ .

Έτσι

$$z_1 = 3 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right),$$

$$\arg z_1 = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

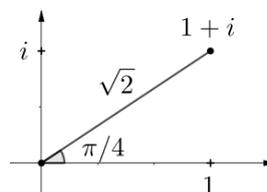


**Παράδειγμα 1.3.5.**  $z_2 = 1 + i$ .

Προκύπτει

$$\text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{4},$$

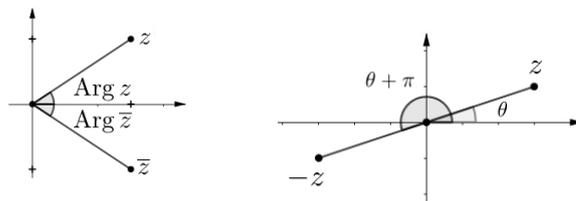
$$z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



**Πρόταση 1.3.6.** Για κάθε  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ισχύει

$$\arg \bar{z} = -\arg z, \quad \arg(-z) = \arg z + \pi.$$

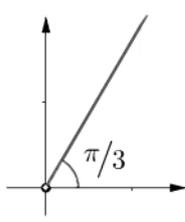
*Απόδειξη.* Άσκηση. Δείτε το επόμενο σχήμα. □



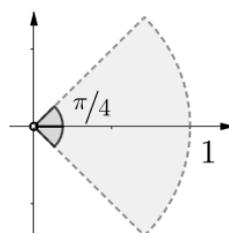
**Παράδειγμα 1.3.7.** Σχεδιάστε τα παρακάτω σύνολα:

1.  $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \text{Arg } z = \frac{\pi}{3}\}$
2.  $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| < 1, -\frac{\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4}\}$ .

Λύση.



Σύνολο 1.



Σύνολο 2.

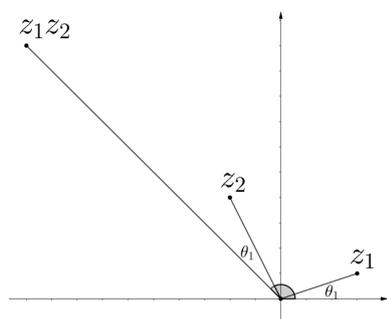
Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού.

Αν  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , τότε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε την ισότητα συνόλων:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

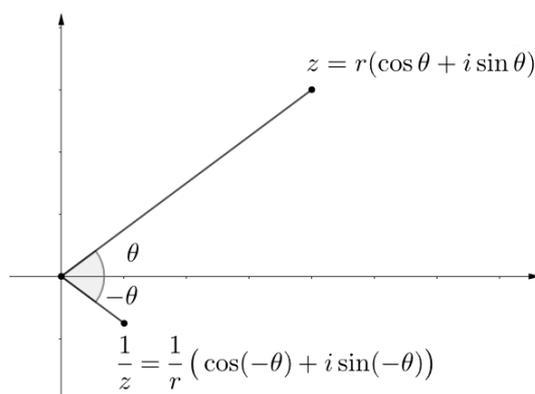


«Για να πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τα μέτρα τους και προσθέτουμε τα ορίσματά τους»

**Πολική μορφή του αντίστροφου**

Αν  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r} \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)).$$



Άρα

$$\arg \frac{1}{z} = -\arg z. \quad (\text{ισότητα συνόλων})$$

**Παράδειγμα 1.3.8.**  $z_1 = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ ,  $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ .  
 Ισχύει  $r_1 = 2$ ,  $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $r_2 = 3$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ . Άρα

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 3 \cdot 2 \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 6 \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.3.9.**  $z_1 = 3(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ ,  $z_2 = 4i = 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ .  
 Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{4} \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{3}{4} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} + i \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

**Πρόταση 1.3.10 (Τύπος de Moivre).**

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Απόδειξη. Για  $n = 1$  η ισότητα είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει για  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε

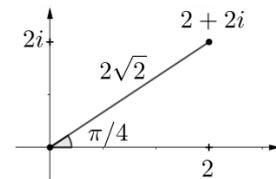
$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos(n\theta) \cos \theta - \sin(n\theta) \sin \theta + \\ &\quad + i [\cos(n\theta) \sin \theta + \sin(n\theta) \cos \theta] \\ &= \cos [(n+1)\theta] + i \sin [(n+1)\theta]. \quad \square \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.3.11.** Υπολογίστε το  $(2+2i)^{17}$ .

Λύση. Ισχύει ότι

$$2+2i = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

άρα



$$\begin{aligned} (2+2i)^{17} &= (\sqrt{8})^{17} \left( \cos \frac{17\pi}{4} + i \sin \frac{17\pi}{4} \right) = 2^{\frac{3}{2} \cdot 17} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{51}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2^{25} \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2^{25} (1+i). \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.3.12.** Από τον τύπο de Moivre προκύπτει ότι

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta.$$

Άρα

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{και} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

## 1.4 Ασκήσεις

1.1. Γράψτε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή  $x+iy$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$(\overline{2-i})^2, \quad \frac{1+i}{2i}, \quad \frac{i-\pi}{i+\pi}, \quad (2i)^5, \quad i \frac{3+i}{3}, \quad 4i(2-i)^2.$$

1.2. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$  και  $z_2 = 2 - 2i$ .

(α) Βρείτε τους αριθμούς  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}, |z_1|$  και  $|z_2|$  σε καρτεσιανή μορφή.

(β) Βρείτε την πολική μορφή των  $z_1$  και  $z_2$ .

1.3. Για  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες:

- (α)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ,  
 (β)  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ,  
 (γ)  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ .

1.4. Σωστό ή Λάθος;

- (α)  $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ .  
 (β)  $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2$ .

1.5. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} z_1 + 3\bar{z}_2 = 6 + 3i \\ \bar{z}_1 + (1 + i)z_2 = 5. \end{cases}$$

1.6. (α) Δείξτε ότι  $|z - w| = |1 - \bar{w}z|$  αν και μόνο αν  $|z| = 1$  ή  $|w| = 1$ .

(β) Δείξτε ότι  $|z - w| < |1 - \bar{w}z|$  αν και μόνο αν  $|z|, |w| < 1$  ή  $|z|, |w| > 1$ .

1.7. Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Δείξτε ότι οι διάμεσοι τού τριγώνου με κορυφές τα  $z_1, z_2, z_3$  τέμνονται στο σημείο  $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ .

1.8. Δείξτε ότι τα  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου αν και μόνο αν

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

1.9. Σχεδιάστε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που ικανοποιούν την δοσμένη ισότητα ή ανισότητα.

- (α)  $|z - 4| = 3$ , (β)  $|z - i| = -1$ , (γ)  $|z - i| + |z| = 2$ , (δ)  $|z - 1| < 4$ ,  
 (ε)  $0 < |z - 1 - i| < 1$ .

1.10.

- (α) Δείξτε ότι το σύνολο των σημείων  $z \in \mathbb{C}$  με  $\operatorname{Re} z = a \in \mathbb{R}$  είναι η κατακόρυφη ευθεία  $x = a$ .  
 (β) Δείξτε ότι το σύνολο των σημείων  $z \in \mathbb{C}$  με  $\operatorname{Im} z = b \in \mathbb{R}$  είναι η οριζόντια ευθεία  $y = b$ .  
 (γ) Αν  $z_1 \neq z_2$ , δείξτε ότι το σύνολο των σημείων  $z$  με  $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$ , όπου  $t \in \mathbb{R}$ , είναι η ευθεία που περνά από τα  $z_1, z_2$ .

1.11. Βρείτε την πολική μορφή των παρακάτω μιγαδικών αριθμών.

$$-3 - 3i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad -1 - \sqrt{3}i, \quad 1 + i, \quad (-\sqrt{3} + i)^3, \quad (-2 - 3i)^{17}.$$

**1.12.** Βρείτε ευθεία  $\ell$  τέτοια ώστε τα δοσμένα δύο σημεία να είναι συμμετρικά ως προς  $\ell$ :

$$(\alpha) z, \bar{z}, \quad (\beta) z, i\bar{z}, \quad (\gamma) z, -i\bar{z}.$$

**1.13.** Δείξτε ότι οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις είναι ευθείες στο μιγαδικό επίπεδο:

$$(\alpha) |z - z_1| = |z - z_2|, \quad z_1 \neq z_2.$$

$$(\beta) zz_0 + \bar{z}\bar{z}_0 = d, \quad z_0 \neq 0, d \in \mathbb{R}.$$

$$(\gamma) \operatorname{Im} \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) = 0, \quad z_1 \neq z_2.$$

**1.14.** Σχεδιάστε στο μιγαδικό επίπεδο τα  $z \in \mathbb{C}$  για τα οποία το  $\frac{\pi}{4}$  είναι τιμή του  $\arg z$ . Το ίδιο για το  $-\frac{\pi}{3}$ .

**1.15.** Σωστό ή Λάθος;

$$(\alpha) \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

$$(\beta) \operatorname{Arg} \bar{z}_1 = -\operatorname{Arg} z_1.$$

**1.16.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $z^n = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  έχει ρίζες τα  $n$  στο πλήθος σημεία

$$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} \alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} \alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**1.17.** Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις, για  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(\alpha) z^2 + z + 1 = 0,$$

$$(\beta) z^3 = 2i,$$

$$(\gamma) z^5 = -1,$$

$$(\delta) z^4 - 1 = i.$$

$$(\epsilon) z^{n-1} = \bar{z}, \quad z \neq 0, n \neq 2.$$

**1.18.** Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\cos(2k\theta) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{2k}{2l} \sin^{2l} \theta \cos^{2(k-l)} \theta$$

και

$$\sin(2k\theta) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{2k}{2l+1} \sin^{2l+1} \theta \cos^{2(k-l)-1} \theta,$$

όπου  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  είναι ο διωνυμικός συντελεστής των  $n$  ανά  $m$ , και  $k \in \mathbb{N}$ .

1.19. Ορίζουμε την απεικόνιση  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(\bar{z}w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Δείξτε ότι η  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  πληροί τις ιδιότητες:

- (α)  $\langle z, z \rangle \geq 0$  και  $\langle z, z \rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0$ , για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ .
- (β)  $\langle z, w \rangle = \langle w, z \rangle$  και  $\langle \bar{z}, w \rangle = \langle z, \bar{w} \rangle$ , για όλα τα  $z, w \in \mathbb{C}$ .
- (γ)  $\langle z_1 + z_2, w \rangle = \langle z_1, w \rangle + \langle z_2, w \rangle$  και  $\langle z, w_1 + w_2 \rangle = \langle z, w_1 \rangle + \langle z, w_2 \rangle$ , για κάθε  $z, z_1, z_2$  και  $w, w_1, w_2$  στο  $\mathbb{C}$ .
- (δ)  $\langle rz, w \rangle = r\langle z, w \rangle = \langle z, rw \rangle$  και  $\langle iz, w \rangle = -\langle z, iw \rangle$  για κάθε  $z, w \in \mathbb{C}$  και  $r \in \mathbb{R}$ .
- (ε)  $\langle z \cdot z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re} z \langle z_1, z_2 \rangle + \operatorname{Im} z \langle iz_1, z_2 \rangle$ , για κάθε  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Δείξτε ακόμη ότι  $|z| \equiv \sqrt{\langle z, z \rangle}$  καθώς και ότι αν ταυτίσουμε τα σημεία του  $\mathbb{C}$  με τα διανύσματα του  $\mathbb{R}^2$ , τότε αν  $\phi_{z,w}$  είναι η γωνία των διανυσμάτων  $z, w \in \mathbb{R}^2$ , ισχύει ότι

$$\cos \phi_{z,w} = \frac{\langle z, w \rangle}{|z||w|} \quad \text{και} \quad \sin \phi_{z,w} = \frac{\langle z, -iw \rangle}{|z||w|}.$$

1.20. Δείξτε ότι

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(x + iy) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

1.21. Δίνεται πολυώνυμο  $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ , με  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ . Αν το  $z_0$  είναι ρίζα του πολυωνύμου  $p$ , δείξτε ότι

- (α)  $|z_0| \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right| \right\}$ .
- (β)  $|z_0| \leq 1 + \max \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|, \dots, \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right\}$ .



## Κεφάλαιο 2

# Τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου

### 2.1 Βασικές έννοιες

**Ορισμός 2.1.1.** Έστω  $A \subset \mathbb{C}$  και έστω  $z \in \mathbb{C}$ .

1. Το  $z$  ονομάζεται *εσωτερικό σημείο* του  $A$  αν  $\exists r > 0$  τέτοιο ώστε  $D(z, r) \subset A$ .

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του  $A$  ονομάζεται *εσωτερικό* του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^\circ$ .

Το  $A$  ονομάζεται *ανοικτό σύνολο* αν  $A = A^\circ$ .

2. Το  $z$  ονομάζεται *συνοριακό σημείο* του  $A$  αν  $\forall r > 0$ ,  $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$  και  $D(z, r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$ .

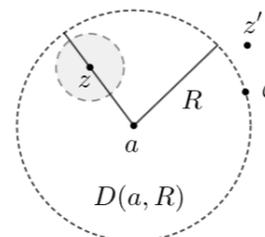
Το σύνολο των συνοριακών σημείων του  $A$  ονομάζεται *σύνορο* του  $A$  και συμβολίζεται με  $\partial A$ .

**Παράδειγμα 2.1.2.**  $A = D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ .

Αν  $z \in D(a, R)$ , τότε για  $r < R - |z - a|$ ,

$$D(z, r) \subset D(a, R).$$

Άρα κάθε  $z \in D(a, R)$  είναι εσωτερικό σημείο του  $D(a, R)$ . Συνεπώς  $D(a, R)^\circ = D(a, R)$  και το  $D(a, R)$  είναι ανοικτό σύνολο.



Αν  $|\zeta - a| = R$ , το  $\zeta$  είναι συνοριακό σημείο, δηλαδή  $\partial D(a, R) = C(a, R)$ .

**Ορισμός 2.1.3.** Ένα σύνολο  $A \subset \mathbb{C}$  ονομάζεται κλειστό αν το  $\mathbb{C} \setminus A$  είναι ανοικτό.

**Παράδειγμα 2.1.4.**

1. Ο κλειστός δίσκος  $\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$  είναι κλειστό σύνολο.
2. Ο κύκλος  $C(0, R)$  είναι κλειστό σύνολο.
3. Το  $\mathbb{R}$  είναι κλειστό σύνολο.
4. Ο φανταστικός άξονας  $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$  είναι κλειστό σύνολο.

**Ορισμός 2.1.5.** Αν  $A \subset \mathbb{C}$  και  $z \in \mathbb{C}$ , το  $z$  ονομάζεται σημείο περιβλήματος του  $A$ , αν  $\forall r > 0, D(z, r) \cap A \neq \emptyset$ . Το σύνολο των σημείων περιβλήματος του  $A$  ονομάζεται περίβλημα του  $A$  και συμβολίζεται με  $\bar{A}$ .

**Γνωστές ιδιότητες από την Τοπολογία Μετρικών Χώρων**

1.  $\partial A = \partial \bar{A}$ .
2.  $A^\circ = A \setminus \partial A$ .
3.  $A$  ανοικτό  $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$ .
4.  $A$  κλειστό  $\Leftrightarrow \partial A \subset A$ .
5. Το  $\bar{A}$  είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του  $A$ .
6. Το  $A^\circ$  είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του  $A$ .

**Παράδειγμα 2.1.6.** Το ορθογώνιο

$$\{z = x + iy : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

είναι κλειστό σύνολο. Το ημιεπίπεδο  $\{z = x + iy : x > 0\}$  είναι ανοικτό σύνολο. Το  $\{z = x + iy : x \geq 0\}$  είναι κλειστό.

## 2.2 Ακολουθίες μιγαδικών αριθμών

**Ορισμός 2.2.1.** Δίνεται ακολουθία μιγαδικών αριθμών  $\{z_n\}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \stackrel{\text{σμβ}}{\Leftrightarrow} z_n \rightarrow z \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_0, |z_n - z| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \stackrel{\text{σμβ}}{\Leftrightarrow} z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_0, |z_n| > M.$$

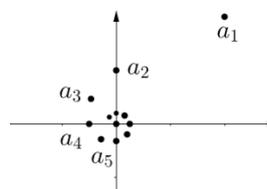
**Παρατήρηση 2.2.2.** Ισχύει  $z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow +\infty$ .

**Παράδειγμα 2.2.3.**  $a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$

Ισχύει  $|a_n| = \frac{1}{n}$ . Άρα αν  $\varepsilon > 0$ , επιλέγουμε  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ .  
Τότε

$$\forall n \geq n_0, |a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Επομένως  $a_n \rightarrow 0$ .



**Ορισμός 2.2.4.** Μια ακολουθία  $\{z_n\}$  στο  $\mathbb{C}$  ονομάζεται *φραγμένη*, αν υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε  $|z_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ .

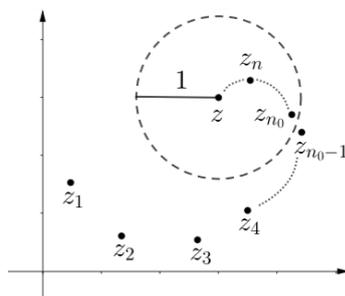
**Πρόταση 2.2.5.** Αν  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$  και  $z_n \rightarrow z$ , τότε η  $\{z_n\}$  είναι φραγμένη.

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για  $\varepsilon = 1$ . Βρίσκουμε  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $\forall n \geq n_0, |z_n - z| < 1$ . Άρα

$$\forall n \geq n_0, |z_n| \leq 1 + |z|.$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_0-1}|, 1 + |z|\}.$$



Τότε  $|z_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ . □

**Πρόταση 2.2.6.** Αν  $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{C}$  και  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a, b \in \mathbb{C}$ , τότε

1.  $\lim_n (a_n + b_n) = a + b,$
2.  $\lim_n (a_n b_n) = ab,$
3.  $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$
4.  $\lim_n \bar{a}_n = \bar{a},$
5.  $\lim_n |a_n| = |a|.$

Απόδειξη. Άσκηση. □

**Πρόταση 2.2.7.** Έστω  $\{z_n\}$  ακολουθία στο  $\mathbb{C}$ . Θέτουμε  $x_n = \operatorname{Re} z_n$  και  $y_n = \operatorname{Im} z_n$ . Ισχύει

$$\lim_n z_n = x + iy \Leftrightarrow \lim_n x_n = x, \lim_n y_n = y.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι  $z_n \rightarrow x + iy$ . Τότε  $\bar{z}_n \rightarrow x - iy$ . Άρα

$$z_n + \bar{z}_n \rightarrow x + iy + x - iy = 2x$$

και

$$z_n - \bar{z}_n \rightarrow x + iy - x + iy = 2iy.$$

Άρα

$$2x_n \rightarrow 2x \Rightarrow x_n \rightarrow x \quad \text{και} \quad 2y_n \rightarrow 2y \Rightarrow y_n \rightarrow y.$$

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι  $x_n \rightarrow x$  και  $y_n \rightarrow y$ . Τότε  $iy_n \rightarrow iy$ . Άρα  $x_n + iy_n \rightarrow x + iy$ . □

**Παράδειγμα 2.2.8.** Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \begin{cases} 0, & |z| < 1 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$$

και ότι το όριο δεν υπάρχει (δεν ανήκει στο  $\mathbb{C}$ ) για άλλες τιμές του  $z$ .

Λύση.

**Βήμα 1.** Έστω  $|z| = r < 1$ . Τότε  $|z^n| = |z|^n = r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Άρα  $\lim_n z^n = 0$ .

**Βήμα 2.** Έστω  $|z| > 1$ . Τότε  $|z|^n \rightarrow \infty$ . Άρα η ακολουθία  $\{z^n\}$  δεν είναι φραγμένη, άρα ούτε και συγκλίνει.

**Βήμα 3.** Αν  $z = 1$ , τότε  $z^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$  και  $z^n \xrightarrow{n} 1$ .

**Βήμα 4.** Έστω  $|z| = 1$  και  $z \neq 1$ . Ας υποθέσουμε ότι  $z^n \xrightarrow{n} L \in \mathbb{C}$ . Τότε

$$|L| = \left| \lim_n z^n \right| = \lim_n |z|^n = 1.$$

Άρα  $L \neq 0$ . Επίσης

$$z^n \rightarrow L \Rightarrow z^{n+1} \rightarrow L \Rightarrow z \cdot z^n \rightarrow L.$$

Όμως  $z z^n \rightarrow zL$ . Άρα  $zL = L$ , που συνεπάγεται ότι  $z = 1$ . Άτοπο.

**Ορισμός 2.2.9.** Η μιγαδική ακολουθία  $\{z_n\}$  ονομάζεται ακολουθία *Cauchy*, αν

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n, m \geq n_0, |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

**Πρόταση 2.2.10.** Έστω  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$  μια μιγαδική ακολουθία. Τότε η  $\{z_n\}$  συγκλίνει αν και μόνο αν η  $\{z_n\}$  είναι ακολουθία *Cauchy*.

*Απόδειξη.* Για την ευθεία κατεύθυνση της απόδειξης, υποθέτουμε ότι η  $\{z_n\}$  συγκλίνει στο  $L \in \mathbb{C}$ . Έστω  $\varepsilon > 0$ . Τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$ ,  $|z_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Άρα,  $\forall n, m \geq n_0$ ,

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - L| + |z_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή η  $\{z_n\}$  είναι ακολουθία *Cauchy*.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η  $\{z_n\}$  είναι ακολουθία *Cauchy*. Γράφουμε  $z_n = x_n + iy_n$ . Επειδή

$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \quad \text{και} \quad |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|,$$

προκύπτει ότι οι  $\{x_n\}$  και  $\{y_n\}$  είναι (πραγματικές) ακολουθίες *Cauchy*. Άρα υπάρχουν  $x, y \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $x_n \rightarrow x$  και  $y_n \rightarrow y$ . Επομένως

$$z_n = x_n + iy_n \rightarrow x + iy. \quad \square$$

**Πρόταση 2.2.11.** Έστω  $A \subset \mathbb{C}$ . Ισχύει

$$z \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{z_n\} \subset A \quad \mu\epsilon \quad z_n \rightarrow z.$$

*Απόδειξη.* Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι  $z_n \rightarrow z$ . Έστω  $D(z, \varepsilon)$  τυχαία περιοχή του  $z$ . Επειδή  $z_n \rightarrow z$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $\forall n \geq n_0$ ,  $z_n \in D(z, \varepsilon)$ . Άρα  $D(z, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , δηλαδή  $z \in \bar{A}$ .

Για το ευθύ, έστω  $z \in \bar{A}$ . Τότε

$$\forall \varepsilon > 0, \quad D(z, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Εφαρμόζουμε αυτή την ιδιότητα για  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  και βρίσκουμε  $z_1, z_2, \dots \in A$  με  $z_n \in D(z, \frac{1}{n})$  ή ισοδυνάμως  $|z_n - z| < \frac{1}{n}$ . Άρα  $z_n \rightarrow z$ .  $\square$

**Πρόταση 2.2.12.** Αν  $K \subset \mathbb{C}$  είναι κλειστό σύνολο,  $\{z_n\}$  ακολουθία στο  $K$  και  $z_n \rightarrow z$ , τότε  $z \in K$ .

*Απόδειξη.* Όπως στην αντίστροφη κατεύθυνση της παραπάνω απόδειξης, βρίσκουμε ότι  $z \in \bar{K}$ . Όμως  $K = \bar{K}$ . Άρα  $z \in K$ .  $\square$

### 2.3 Συμπαγή σύνολα

**Ορισμός 2.3.1.** Ένα σύνολο  $A \subset \mathbb{C}$  ονομάζεται φραγμένο αν  $\exists M > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall z \in A, |z| \leq M$ .

**Ορισμός 2.3.2.** Ένα σύνολο  $K \subset \mathbb{C}$  ονομάζεται συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Από την Τοπολογία είναι γνωστό το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.3.3.** Έστω  $K \subset \mathbb{C}$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) Το  $K$  είναι συμπαγές.
- (β) Αν  $\{z_n\}$  είναι μια ακολουθία στο  $K$ , τότε υπάρχει υπακολουθία  $\{z_{n_k}\}$  με  $z_{n_k} \rightarrow L \in K$ .
- (γ) Αν

$$K \subset \bigcup_j A_j,$$

όπου  $A_j$  ανοικτά υποσύνολα του  $\mathbb{C}$ , τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους  $A_k, k \in \{1, 2, \dots, N\}$  τέτοια ώστε

$$K \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N.$$

#### Παράδειγμα 2.3.4.

1. Ο δίσκος  $\overline{D}(z_0, R)$  είναι συμπαγές σύνολο.
2. Ο δίσκος  $D(z_0, R)$  δεν είναι κλειστό σύνολο.
3. Ο κύκλος  $C(z_0, R)$  είναι συμπαγές σύνολο.
4. Το ημιεπίπεδο  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  δεν είναι φραγμένο και δεν είναι κλειστό σύνολο.
5. Ο κλειστός δακτύλιος  $\overline{A}(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}$  είναι συμπαγές.
6. Ο δακτύλιος  $A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$  δεν είναι κλειστό σύνολο.

#### Θεώρημα 2.3.5 (Θεώρημα Bolzano - Weierstrass).

Κάθε φραγμένη ακολουθία  $\{z_n\}$  στο  $\mathbb{C}$  έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Έστω ότι η  $\{z_n\}$  είναι φραγμένη. Τότε  $\exists M > 0$  τέτοιο ώστε  $|z_n| \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Αν  $z_n = x_n + iy_n$ , τότε οι  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  είναι φραγμένες πραγματικές ακολουθίες. Άρα από το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass στο  $\mathbb{R}$ , υπάρχει υπακολουθία  $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$  τέτοια ώστε  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ . Από το ίδιο θεώρημα, η  $\{y_{n_k}\}$  έχει υπακολουθία  $\{y_{n_{k_j}}\}$  τέτοια ώστε  $y_{n_{k_j}} \rightarrow y_0$ . Τότε η

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \xrightarrow{j} x_0 + iy_0. \quad \square$$

**Πρόταση 2.3.6.** Κάθε μη φραγμένη ακολουθία  $\{z_n\}$  έχει υπακολουθία που τείνει στο  $\infty$ .

Απόδειξη. Η  $\{|z_n|\}$  είναι μη-φραγμένη πραγματική ακολουθία. Άρα, από την Πραγματική Ανάλυση, υπάρχει υπακολουθία  $\{z_{n_k}\}$  με  $|z_{n_k}| \rightarrow +\infty$ . Τότε  $z_{n_k} \rightarrow \infty$ .  $\square$

Πριν διατυπώσουμε το παρακάτω βασικό τοπολογικό θεώρημα, θυμίζουμε την έννοια της διαμέτρου ενός συνόλου  $E \subset \mathbb{C}$ :

$$\text{diam } E = \sup \{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}.$$

**Θεώρημα 2.3.7 (Αρχή Κιβωτισμού).**

(α) Αν για τα μη-κενά συμπαγή σύνολα  $K_j$  ισχύει  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ , τότε

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} K_j \neq \emptyset.$$

(β) Αν επιπλέον  $\text{diam } K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , τότε το σύνολο  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} K_j$  είναι ένα μονοσύνολο  $\{z\}$  και επιπλέον  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $\forall n \geq n_0$ ,  $K_n \subset D(z, \varepsilon)$ .

Απόδειξη.

(α) Επιλέγουμε ένα  $z_n$  από κάθε  $K_n$ . Η  $\{z_n\}$  είναι μέσα στο  $K_1$  που είναι φραγμένο. Από το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass,

$$\exists \{z_{n_k}\} \subset \{z_n\} \text{ τέτοια ώστε } z_{n_k} \rightarrow z.$$

Έστω τώρα  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε  $n_k > n$  από ένα  $k_0$  και πέρα. Άρα  $z_{n_k} \in K_{n_k} \subset K_n$ ,  $\forall k \geq k_0$ . Παίρνουμε το όριο για  $k \rightarrow \infty$  και επειδή το  $K_n$  είναι κλειστό, θα ισχύει  $z \in K_n$ . Άρα  $z \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ .

(β) Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} K_j$  περιέχει εκτός από το  $z$  και ένα άλλο

σημείο  $w \neq z$ . Τότε  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{diam } K_n \geq |w - z| > 0$ , και παίρνοντας όρια για  $n \rightarrow +\infty$ , καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} K_j = \{z\}.$$

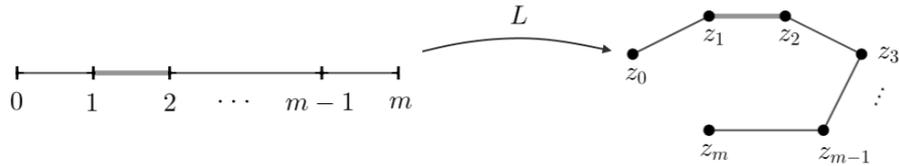
Τέλος, έστω  $\varepsilon > 0$ . Επειδή  $\text{diam } K_n \rightarrow 0$ , θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $\forall n \geq n_0$ ,  $\text{diam } K_n < \varepsilon$ . Επομένως, αν  $n \geq n_0$  και  $w \in K_n$ , τότε  $|w - z| < \varepsilon$ , δηλαδή  $w \in D(z, \varepsilon)$ . Άρα  $K_n \subset D(z, \varepsilon)$ .  $\square$

## 2.4 Συνεκτικά σύνολα. Τόποι

**Ορισμός 2.4.1.** Αν  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 \neq z_1$ , το ευθύγραμμο τμήμα  $[z_0, z_1]$  είναι το σύνολο  $\{(1-t)z_0 + tz_1 : t \in [0, 1]\}$ .

**Ορισμός 2.4.2.** Μια πολυγωνική γραμμή είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών ευθύγραμμων τμημάτων  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  έτσι ώστε το τελικό σημείο καθενός  $L_j$  να συμπίπτει με το αρχικό σημείο του  $L_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m-1$ . Πιο αυστηρά: πολυγωνική γραμμή με  $m$  πλευρές είναι μια απεικόνιση

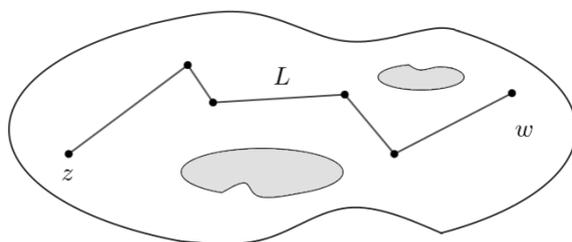
$$L : [0, m] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{με} \quad L(t) = \begin{cases} (1-t)z_0 + tz_1, & t \in [0, 1] \\ (2-t)z_1 + (t-1)z_2, & t \in [1, 2] \\ \vdots \\ (m-t)z_{m-1} + (t-m+1)z_m, & t \in [m-1, m] \end{cases}$$



Παρατηρούμε ότι  $L([k-1, k]) = [z_{k-1}, z_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  και  $L(k) = z_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ .

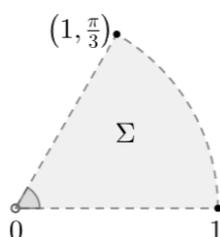
**Ορισμός 2.4.3.** Ένα σύνολο  $A \subset \mathbb{C}$  ονομάζεται πολυγωνικά συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος σημείων  $z, w \in A$ , υπάρχει πολυγωνική γραμμή  $L : [0, m] \rightarrow A$  με  $L(0) = z$  και  $L(m) = w$ .

**Ορισμός 2.4.4.** Ένα μη-κενό, ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο στο  $\mathbb{C}$  ονομάζεται τόπος.



**Παράδειγμα 2.4.5.** Τα παρακάτω σύνολα είναι τόποι.

1. Ο δίσκος  $D(a, R)$  και ο δακτύλιος  $A(a, r, R)$ .
2. Το ημιεπίπεδο  $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ .
3. Το ορθογώνιο  $R = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b, \quad c < \operatorname{Im} z < d\}$ .
4. Τα  $\mathbb{D}^c = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  και  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ .
5. Ο τομέας  $\Sigma = \{r(\cos \theta + i \sin \theta) : 0 < r < 1, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{3})\}$ .



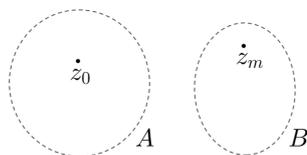
**Ορισμός 2.4.6.** Ένα ανοικτό σύνολο  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ονομάζεται *συνεκτικό* αν δεν υπάρχουν μη-κενά, ανοικτά, ξένα σύνολα  $A, B$  έτσι ώστε

$$\Omega = A \cup B.$$

**Θεώρημα 2.4.7.** Έστω  $D \subset \mathbb{C}$  ένα μη-κενό ανοικτό σύνολο. Το  $D$  είναι πολυγωνικά συνεκτικό αν και μόνο αν το  $D$  είναι συνεκτικό.

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι το  $D$  είναι πολυγωνικά συνεκτικό. Θα δείξουμε ότι το  $D$  είναι συνεκτικό. Έστω ότι δεν είναι. Τότε

$$D = A \cup B, \quad A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A, B \text{ ανοικτά.}$$



Διαλέγουμε δύο σημεία  $z_0 \in A$  και  $z_m \in B$ . Θεωρούμε πολυγωνική γραμμή  $L(t) \subset D = A \cup B$ ,  $t \in [0, m]$  με  $L(0) = z_0$  και  $L(m) = z_m$ . Θέτουμε

$$t^* := \sup \{t \in [0, m] : L(t) \in A\}.$$

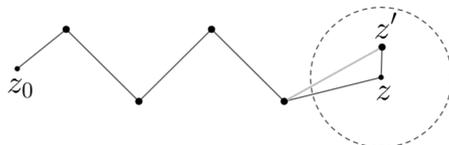
Θεωρούμε ακολουθία  $\{t_n\}$  με  $t_n \rightarrow t^*$  και  $L(t_n) \in A$ . Λόγω συνέχειας της  $L$ , ισχύει  $L(t_n) \rightarrow L(t^*)$ . Έτσι, με απαγωγή σε άτοπο, προκύπτει ότι  $L(t^*) \notin B$ . Άρα  $L(t^*) \in A$ . Επειδή το  $A$  είναι ανοικτό, για κάποιο  $\delta > 0$  θα είναι  $L(t^* + \delta) \in A$ . Άτοπο, διότι το  $t^*$  είναι supremum.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το  $D$  είναι συνεκτικό. Θα δείξουμε ότι το  $D$  είναι πολυγωνικά συνεκτικό. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι πολυγωνικά συνεκτικό. Τότε  $\exists z_0, z_1 \in D$ , σημεία που δεν μπορούν να συνδεθούν με πολυγωνική γραμμή στο  $D$ . Θέτουμε

$$A = \{z \in D : \text{το } z \text{ συνδέεται με το } z_0 \text{ με πολυγωνική γραμμή}\}$$

$$B = \{z \in D : \text{το } z \text{ δεν συνδέεται με το } z_0 \text{ με πολυγωνική γραμμή}\}$$

Επειδή  $z_0 \in A$  και  $z_1 \in B$ , είναι  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ . Επίσης τα  $A$  και  $B$  είναι ανοικτά (βλέπε και το σχήμα):



$$z \in A \Rightarrow D(z, \varepsilon) \subset A \Rightarrow A \text{ ανοικτό.}$$

$$z \in B \Rightarrow D(z, \varepsilon) \subset B \Rightarrow B \text{ ανοικτό.}$$

Άτοπο. □

**Ορισμός 2.4.8.** Έστω  $A \subset \mathbb{C}$  ένα ανοικτό σύνολο. Ένας τόπος  $D \subset A$  ονομάζεται *συνεκτική συνιστώσα* του  $A$  αν έχει την ιδιότητα:

$$\text{Αν } D' \text{ τόπος και } D \subset D' \subset A, \text{ τότε } D = D'.$$

**Πρόταση 2.4.9.** Έστω  $A \subset \mathbb{C}$  ένα ανοικτό σύνολο. Αν  $D_1, D_2$  είναι δύο συνεκτικές συνιστώσες τού  $A$  και  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$  τότε  $D_1 = D_2$ .

Απόδειξη. Επειδή  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , ο  $D_1 \cup D_2$  είναι τόπος. Από τον ορισμό προκύπτει ότι  $D_1 = D_1 \cup D_2$  και  $D_2 = D_1 \cup D_2$ .  $\square$

**Πρόταση 2.4.10.** Αν  $A \subset \mathbb{C}$  είναι ένα ανοικτό σύνολο, τότε το  $A$  είναι ίσο με την ένωση των (ξένων ανά δύο) συνιστώσών του.

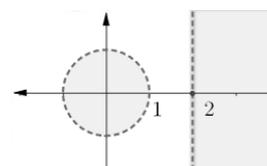
Απόδειξη. Έστω  $z \in A$ . Έστω  $D_z$  η ένωση όλων των ανοικτών συνεκτικών υποσυνόλων του  $A$  που περιέχουν το  $z$ . Τότε το  $D_z$  είναι τόπος. Αν  $D'$  είναι ένας άλλος τόπος με  $D_z \subset D' \subset A$ , τότε ισχύει  $D' = D_z$ , από τον ορισμό του  $D_z$ . Άρα το  $D_z$  είναι συνεκτική συνιστώσα του  $A$  και περιέχει το  $z$ .  $\square$

**Παράδειγμα 2.4.11.**

1.  $A = \mathbb{D} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2\}$ .

Οι συνιστώσες του  $A$  είναι τα σύνολα

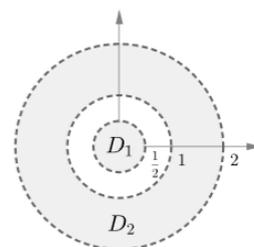
$$D_1 = \mathbb{D} \quad \text{και} \quad D_2 = \{z : \operatorname{Re} z > 2\}.$$



2.  $B = D(0, \frac{1}{2}) \cup A(0, 1, 2)$ .

Οι συνιστώσες του  $B$  είναι τα σύνολα

$$D_1 = D(0, \frac{1}{2}) \quad \text{και} \quad D_2 = A(0, 1, 2).$$



## 2.5 Μιγαδικές συναρτήσεις

**Ορισμός 2.5.1.** Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  με  $A \subset \mathbb{C}$  ονομάζεται *μιγαδική συνάρτηση*. Μια τέτοια συνάρτηση καθορίζει δύο πραγματικές συναρτήσεις

$$\operatorname{Re} f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \operatorname{Im} f : A \rightarrow \mathbb{R},$$

με τύπους  $(\operatorname{Re} f)(z) = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $(\operatorname{Im} f)(z) = \operatorname{Im} f(z)$ .

Συμβολισμός:  $\operatorname{Re} f = u$ ,  $\operatorname{Im} f = v$ .

**Παράδειγμα 2.5.2.**  $f(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Τότε

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

άρα

$$u(x, y) = u(z) = u(x + iy) = x^2 - y^2,$$

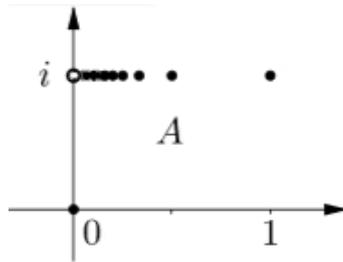
$$v(x, y) = v(z) = v(x + iy) = 2xy$$

και  $f = u + iv$ .

**Ορισμός 2.5.3.** Έστω  $A \subset \mathbb{C}$ . Ένα σημείο  $z \in \mathbb{C}$  ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* του  $A$  αν  $\forall r > 0, (D(z, r) \setminus \{z\}) \cap A \neq \emptyset$ .

Ένα σημείο  $z \in A$  ονομάζεται *απομονωμένο σημείο* του  $A$  αν  $\exists r > 0$  τέτοιο ώστε  $D(z, r) \cap A = \{z\}$ .

**Παράδειγμα 2.5.4.**  $A = \{\frac{1}{n} + i : n \in \mathbb{N}\}$ .



Το  $i$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$  ( $i \notin A$ ). Όλα τα σημεία του  $A$  είναι απομονωμένα.

**Ορισμός 2.5.5.** Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  και έστω  $z_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε:}$$

$$(0 < |z - z_0| < \delta \text{ και } z \in A) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

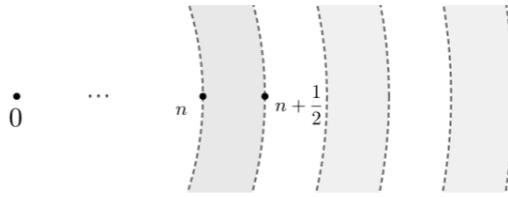
**Ορισμός 2.5.6.** Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  και  $z_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε:}$$

$$(0 < |z - z_0| < \delta \text{ και } z \in A) \Rightarrow |f(z)| > M.$$

**Ορισμός 2.5.7.** Έστω  $A \subset \mathbb{C}$ . Λέμε ότι το  $\infty$  είναι *σημείο συσσώρευσης* του  $A$  αν  $\forall M > 0, \{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \cap A \neq \emptyset$ .

**Παράδειγμα 2.5.8.** Αν  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(0, n, n + \frac{1}{2})$ , τότε το  $\infty$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$ .



**Ορισμός 2.5.9.** Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Αν το  $\infty$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$ , ορίζουμε:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ τέτοιο ώστε:}$$

$$(|z| > M \text{ και } z \in A) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists M' > 0 \text{ τέτοιο ώστε:}$$

$$(|z| > M' \text{ και } z \in A) \Rightarrow |f(z)| > M.$$

**Πρόταση 2.5.10.** Αν  $f = u + iv : A \rightarrow \mathbb{C}$  και  $a$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$ ,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} u(z) = x_0 \text{ και } \lim_{z \rightarrow a} v(z) = y_0.$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

**Πρόταση 2.5.11.** Έστω  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  και  $z_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \{z_n\} \subset A \setminus \{z_0\} \text{ με } z_n \rightarrow z_0, \text{ ισχύει } f(z_n) \rightarrow \ell.$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

**Παράδειγμα 2.5.12.** Υπολογίστε το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} (\operatorname{Im} z)(z^3 - 1)$ .

Λύση. Θέτουμε  $f(z) = \operatorname{Im} z$  και  $g(z) = z^3 - 1$ . Τότε

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} v(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z^3 - 1) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [x^3 - 3xy^2 - 1 + i(3x^2y - y^3)] = -1.$$

Άρα το όριο είναι  $0 \cdot (-1) = 0$ .

**Παράδειγμα 2.5.13.**

- $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z}$ . Έστω  $\varepsilon > 0$ . Τότε για  $M = \frac{1}{\varepsilon}$  και  $|z| > M$  (δηλαδή  $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ ), ισχύει  $|\frac{1}{z}| < \varepsilon$ . Άρα το όριο είναι ίσο με το 0.

$$2. \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+1}{z-2i} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{2i}{z}} = 1.$$

$$3. \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-2}{2iz^2+3z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}}{2i + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}} = 0.$$

$$4. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \text{ (όπως στο 1).}$$

**Παρατήρηση 2.5.14.** Οι προτάσεις για τα όρια αθροίσματος και γινομένου ισχύουν και αποδεικνύονται όπως στο Λογισμό.

**Παρατήρηση 2.5.15.** Αν  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$  και  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \ell \in \mathbb{C}$ , τότε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)g(z) = \infty.$$

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των ορισμών.

**Παράδειγμα 2.5.16.** Για κάθε πολυώνυμο  $p$  με  $\deg p > 0$ , ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty.$$

Έστω πολυώνυμο  $p(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$  με  $a_n \neq 0$ . Τότε

$$p(z) = z^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n} \right).$$

Ισχύει ότι  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n = \infty$  και ότι  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n} \right) = a_n$ . Άρα  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$ .

## 2.6 Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων

**Ορισμός 2.6.1.** Δίνεται συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$ , και σημείο  $z_0 \in A$ . Η  $f$  ονομάζεται *συνεχής* στο  $z_0$  αν

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } z \in A, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Η  $f$  ονομάζεται *συνεχής* στο  $A$  αν είναι συνεχής  $\forall z_0 \in A$ .

Οι παρακάτω προτάσεις αποδεικνύονται όπως οι αντίστοιχες του Λογισμού ή της Τοπολογίας.

**Πρόταση 2.6.2.** Αν  $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  μια ρητή συνάρτηση και το  $z_0$  δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου  $q$ , τότε η  $r$  είναι συνεχής στο  $z_0$ .

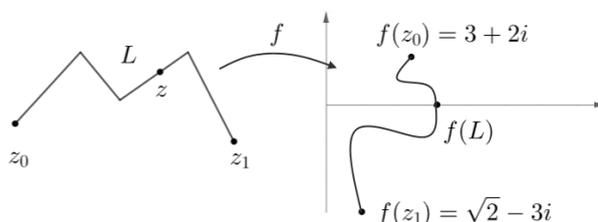
**Πρόταση 2.6.3.** Η συνάρτηση  $f = u + iv$  είναι συνεχής στο  $z_0$  αν και μόνο αν οι συναρτήσεις  $u, v$  είναι συνεχείς στο  $z_0$ .

**Πρόταση 2.6.4.** Έστω  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής,  $K$  συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ . Τότε η  $|f|$  έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο  $K$ .

**Πρόταση 2.6.5 (Ενδιάμεσων τιμών).**

Έστω  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση, όπου  $D$  συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ . Αν  $u_1 < u_2$  είναι δύο τιμές της  $v$  στο  $D$ , δηλαδή  $\exists z_1, z_2 \in D$  με  $v(z_1) = u_1$  και  $v(z_2) = u_2$ , τότε η  $v$  παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα  $[u_1, u_2]$ , δηλαδή  $[u_1, u_2] \subset v(D)$ .

**Παράδειγμα 2.6.6.** Η πολυγωνική γραμμή  $L$  συνδέει τα σημεία  $z_0, z_1$ . Η συνάρτηση  $f : L \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στο  $L$  και  $f(z_0) = 3 + 2i$ ,  $f(z_1) = \sqrt{2} - 3i$ . Τότε  $\exists z \in L$  τέτοιο ώστε  $f(z) \in \mathbb{R}$ .

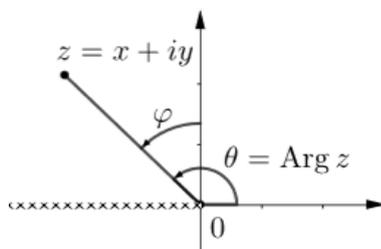


Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v = \operatorname{Im} f : L \rightarrow \mathbb{R}.$$

Το  $L$  είναι συνεκτικό και  $v(z_0) = 2$ ,  $v(z_1) = -3$ . Από την προηγούμενη πρόταση, η  $v$  παίρνει όλες τις τιμές στο  $[-3, 2]$ . Άρα  $\exists z \in L$  τέτοιο ώστε  $\operatorname{Im} f(z) = 0$ , δηλαδή  $f(z) \in \mathbb{R}$ .

**Παράδειγμα 2.6.7.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  που ορίσαμε στην Παράγραφο 1.3.



Θα δούμε ότι η  $\operatorname{Arg}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Έστω  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

Περίπτωση 1.  $\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0$ . Τότε  $z = x + iy$  με  $x < 0, y > 0$  και

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} z = \theta &= \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left( \frac{-x}{y} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left( \frac{-\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \right),\end{aligned}$$

η οποία είναι συνεχής συνάρτηση του  $z$ . Παρομοίως εξετάζουμε και τις άλλες περιπτώσεις.

Η  $\operatorname{Arg}$  δεν είναι συνεχής στα σημεία του  $(-\infty, 0]$ . Θα δούμε μάλιστα ότι η  $\operatorname{Arg} z$  δεν έχει όριο όταν  $z \rightarrow z_0 \in (-\infty, 0]$ . Πράγματι, έστω  $z_0 \in (-\infty, 0]$ .

Περίπτωση A:  $z_0 = 0$ . Αν  $z = x > 0$ , τότε  $\operatorname{Arg} z = 0 \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ . Αν  $z = iy, y > 0$ , τότε

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}.$$

Άρα το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Arg} z$  δεν υπάρχει.

Περίπτωση B:  $z_0 < 0$ . Τότε  $\lim_{0 < y \rightarrow 0} \operatorname{Arg}(z_0 + iy) = \pi$ , ενώ

$$\lim_{0 < y \rightarrow 0} \operatorname{Arg}(z_0 - iy) = -\pi.$$

Άρα το όριο  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z$  δεν υπάρχει.

Τέλος δεν υπάρχει και το όριο  $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Arg} z$ . Πράγματι,  $\lim_{\mathbb{R} \ni z \rightarrow \infty} \operatorname{Arg} z = 0$  ενώ

$$\lim_{\substack{z=iy \\ y \rightarrow +\infty}} \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}.$$

## 2.7 Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο και η σφαίρα του Riemann

**Ορισμός 2.7.1.** Στο  $\mathbb{C}$  επισυνάπτουμε ένα ακόμη σημείο, το  $\infty$ , και ορίζουμε το σύνολο  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  που ονομάζεται *επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο*.

Στο  $\widehat{\mathbb{C}}$  ορίζουμε τις πράξεις:

1.  $z + \infty = \infty = \infty + z, \quad z \in \mathbb{C},$
2.  $z - \infty = \infty = \infty - z, \quad z \in \mathbb{C},$
3.  $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \quad z \neq 0, \quad \text{και} \quad \infty \cdot \infty = \infty,$
4.  $\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty,$

5.  $\frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad z \in \mathbb{C},$

6.  $\overline{\infty} = \infty,$

7.  $|\infty| = +\infty.$

Μη επιτρεπτές πράξεις (δηλαδή πράξεις που δεν ορίζονται):

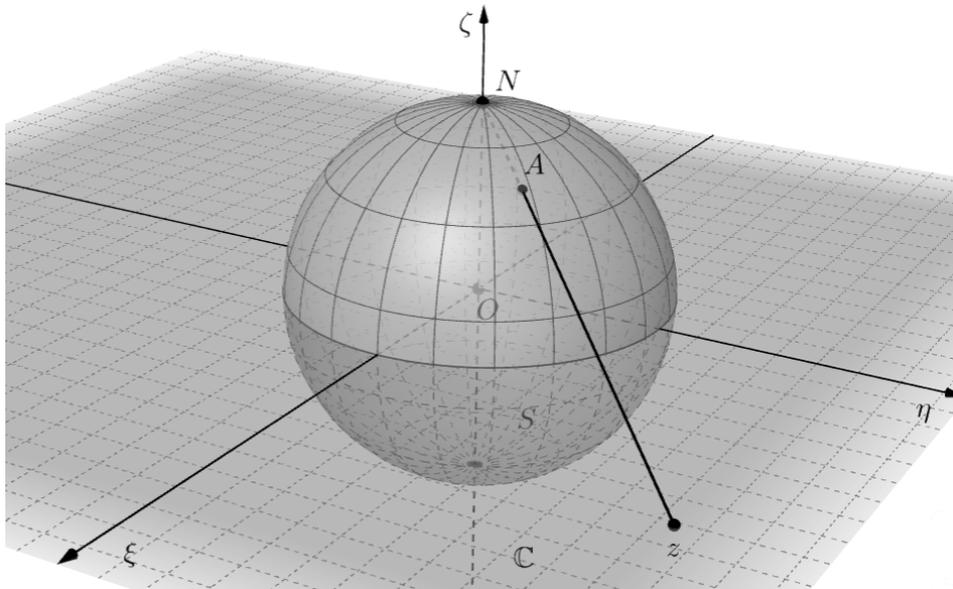
$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

### Η σφαίρα του Riemann

Έστω

$$S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$$

σφαίρα στον  $\mathbb{R}^3$ , κέντρου  $(0,0,0)$  και ακτίνας 1. Ταυτοποιούμε το μιγαδικό επίπεδο με το επίπεδο  $(\xi, \eta)$  στον  $\mathbb{R}^3$ , δηλαδή με το επίπεδο  $\zeta = 0$ . Ονομάζουμε το σημείο  $N = (0,0,1)$  βόρειο πόλο της  $S$ .



Έστω  $z \in \mathbb{C}$ . Θεωρούμε την ευθεία  $Nz$ . Αυτή τέμνει τη σφαίρα  $S$  σ' ένα σημείο  $A$ . Η απεικόνιση  $\sigma$

$$\mathbb{C} \ni z \xrightarrow[1-1, \text{επί}]{\sigma} A \in S \setminus \{N\}$$

ονομάζεται *στερογραφική προβολή* του  $\mathbb{C}$  στην  $S \setminus \{N\}$ . Επεκτείνουμε τη στερογραφική προβολή στο  $\hat{\mathbb{C}}$  θέτοντας  $\sigma(\infty) = N$ . Έτσι προκύπτει η απεικόνιση

$$\sigma : \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow[επί]{1-1} S.$$

Η  $S$  ονομάζεται *σφαίρα του Riemann*.

**Παρατήρηση 2.7.2.**

1.  $\sigma(0) = (0, 0, -1)$  (νότιος πόλος).
2.  $\sigma(\mathbb{D})$  είναι το νότιο ημισφαίριο,  $\sigma(z) = z, \forall z \in \partial\mathbb{D}$ .
3.  $\sigma(C(0, 1))$  είναι ο ισημερινός.
4.  $\sigma(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$  είναι το βόρειο ημισφαίριο.
5. Για  $R > 0$ ,  $\sigma(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$  είναι περιοχή του  $N$ .
6. Η  $\sigma$  είναι ομοιομορφισμός του  $\widehat{\mathbb{C}}$  επί του  $\mathbb{S}$ . Το  $\widehat{\mathbb{C}}$  και το  $\mathbb{S}$  έχουν την ίδια «τοπολογία».

Περισσότερα για τη σφαίρα του Riemann υπάρχουν στο [3] και στο [7].

**2.8 Ασκήσεις**

**2.1.** Σχεδιάστε τα παρακάτω σύνολα και βρείτε τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία τους:

- (α)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ,
- (β)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| \leq 2\}$ ,
- (γ)  $\{z = x + iy : 0 < x < 1, y = 0\}$ .

**2.2.** Σχεδιάστε το δοσμένο σύνολο. Είναι αυτό ανοικτό; κλειστό; συνεκτικό; τόπος;

- (α)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ,
- (β)  $\{z \in \mathbb{C} : |z + 4 + i| < 2\}$ ,
- (γ)  $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{6}\}$ ,
- (δ)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z + 2 + i) > 2\}$ ,
- (ε)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 1\}$ .

**2.3.**

- (α) Σχεδιάστε τα παρακάτω σύνολα.  
 $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, z \neq 0, \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}\}$ ,  
 $B = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2| < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  
 $C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -1, -3 \leq \operatorname{Im} z \leq 3\}$ .

(β) Για καθένα από τα σύνολα  $A, B$  και  $C$ , βρείτε αν

(i) είναι συμπαγές,

(ii) είναι τόπος.

**2.4.** Έστω  $f$  συνάρτηση συνεχής στο ανοικτό σύνολο  $A$ . Δείξτε ότι το σύνολο  $\{z \in A : f(z) \neq 0\}$  είναι ανοικτό.

**2.5.** Σχεδιάστε τα σύνολα

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 2|z|\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 3|z + i|\}.$$

**2.6.** Είναι το ανοικτό διάστημα  $(0, 1) = \{z = x + iy : y = 0, 0 < x < 1\}$  ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ ; Βρείτε τα εσωτερικά, τα συνοριακά, τα εξωτερικά σημεία, και τα σημεία συσσώρευσης του  $(0, 1)$ . Ομοίως για το  $[0, 1]$ .

**2.7.** Σωστό ή Λάθος;

(α) Η ένωση δύο τόπων είναι τόπος.

(β) Κάθε άπειρο σύνολο έχει εσωτερικά σημεία.

(γ) Αν  $A \subset B$ , τότε  $\partial A \subset \partial B$ .

(δ) Αν ο  $D$  είναι τόπος, τότε  $\partial D \neq \emptyset$ .

(ε) Η τομή δύο τόπων είναι τόπος.

(στ) Αν  $D$  είναι τόπος και  $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ , τότε το σύνολο  $D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  είναι τόπος.

**2.8.** Δείξτε ότι ένα σύνολο είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.

**2.9.** Δείξτε ότι αν δύο τόποι έχουν μη κενή τομή, τότε η ένωσή τους είναι τόπος.

**2.10.** Δείξτε ότι αν  $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$  και το  $K$  είναι συμπαγές, τότε υπάρχουν  $z_0, w_0 \in K$  τέτοια ώστε  $|z_0 - w_0| = \text{diam } K$ .

**2.11.** Αν  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ , η διάμετρος του  $A$  είναι ο επεκτεταμένος πραγματικός αριθμός

$$\text{diam } A = \sup\{|z - w| : z, w \in A\}.$$

Δείξτε ότι  $\text{diam } A = \text{diam } \bar{A}$ . Δείξτε ότι το  $A$  είναι φραγμένο αν και μόνο αν  $\text{diam } A < +\infty$ .

**2.12.** Αν  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$  και  $z \in \mathbb{C}$ , η απόσταση του  $z$  από το  $A$  είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\text{dist}(z, A) = \inf\{|z - a| : a \in A\}.$$

Δείξτε ότι:

$$(\alpha) \operatorname{dist}(z, A) = \operatorname{dist}(z, \bar{A}).$$

$$(\beta) \operatorname{dist}(z, A) = 0 \Leftrightarrow z \in \bar{A}.$$

$$(\gamma) |\operatorname{dist}(z, A) - \operatorname{dist}(w, A)| \leq |z - w|.$$

**2.13.** Εξετάστε τη σύγκλιση των παρακάτω ακολουθιών:

$$(\alpha) a_n = \frac{i \sin(\frac{n\pi}{2})}{n}, \quad (\beta) b_n = \frac{1}{n+i}, \quad (\gamma) c_n = \frac{\cos n - in}{n^2}.$$

**2.14.** Δείξτε ότι το  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  είναι σημείο συσσώρευσης τού  $A \subset \mathbb{C}$  αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία  $(z_n)$  στο  $A$  τέτοια ώστε  $z_n \rightarrow z$  και  $z_n \neq z$  για κάθε  $n$ .

**2.15.** Δείξτε ότι οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή, δηλαδή ένωση διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων  $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n]$  είναι συμπαγές σύνολο.

**2.16.** Δείξτε ότι αν  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$  και το  $K$  είναι κλειστό, τότε υπάρχει  $w_0 \in K$  τέτοιο ώστε  $|z - w_0| = \operatorname{dist}(z, K)$ .

**2.17.** Βρείτε όλα τα υποσύνολα τού  $\mathbb{C}$  που είναι ταυτόχρονα και ανοικτά και κλειστά.

**2.18.** Προσδιορίστε τις συνεκτικές συνιστώσες των παρακάτω συνόλων.

$$(\alpha) \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\} \cup D(3 + i, 1),$$

$$(\beta) D(0, 1) \cup D(3, 1) \cup D(1, 1),$$

$$(\gamma) \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 3\}.$$

**2.19.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} z, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{|z|}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(z + \frac{1}{z}\right).$$

**2.20.** Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο 0;

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

**2.21.** Για μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{C}$ , υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $z, w \in A$  ισχύει  $|f(z) - f(w)| \leq M|z - w|$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $A$ .

**2.22.** Για μια συνεχή συνάρτηση  $f : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ , ισχύει  $|f(z)| < 3$  για κάθε  $z \in \bar{\mathbb{D}}$ . Δείξτε ότι υπάρχει θετικός αριθμός  $M < 3$  τέτοιος ώστε για κάθε  $z \in \bar{\mathbb{D}}$  ισχύει  $|f(z)| < M$ .

**2.23.** Δίνεται ανοικτό σύνολο  $A \subset \mathbb{C}$ . Στο  $A$  ορίζουμε τη σχέση  $z \sim w$  αν και μόνο αν υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο  $A$  που συνδέει τα  $z, w$ . Δείξτε ότι αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας. Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

**2.24.** Δείξτε ότι  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$  αν και μόνο αν  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L$ .

**2.25.** Για τη στερεογραφική προβολή  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S} \setminus \{N\}$ , δείξτε ότι

$$\sigma(x + iy) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

**2.26.** Μέσω της στερεογραφικής προβολής  $\sigma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}$  μπορούμε να ορίσουμε μια μετρική στο  $\widehat{\mathbb{C}}$ , ως εξής:

(i) Αν  $z, w \in \mathbb{C}$ , τότε

$$(2.1) \quad \chi(z, w) := |\sigma(z) - \sigma(w)| = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}.$$

(ii) Αν  $w = \infty$ , τότε

$$\chi(z, \infty) := \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Η  $\chi : \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ονομάζεται **χορδική απόσταση** ή **μετρική**. Ο αριθμός  $\chi(z, w)$  είναι η Ευκλείδεια απόσταση των εικόνων των  $z, w$  μέσω της στερεογραφικής προβολής. Τα  $\sigma(z), \sigma(w)$  ορίζουν μια χορδή πάνω στη σφαίρα του Riemann.

(α) Αποδείξτε την ισότητα (2.1).

(β) Δείξτε ότι η  $\chi$  είναι μια μετρική στο  $\widehat{\mathbb{C}}$ , δηλαδή ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες  $\chi(z, w) \geq 0$  και  $\chi(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$ ,  $\chi(z, w) = \chi(w, z)$  και  $\chi(z, w) \leq \chi(z, a) + \chi(a, w)$ , για κάθε  $a, z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

(γ) Δείξτε ότι για  $z, w \neq 0$ ,

$$\chi\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \chi(z, w) \quad \text{και} \quad \chi\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = \chi(z, 0).$$